

Modelo Mecânico para Estruturas Lineares em Concreto Armado – uma Abordagem Acoplada entre a Mecânica do Dano e Algoritmos de Otimização

Caio Gorla Nogueira¹

Resumo

Modelos escritos através dos conceitos da Mecânica do Dano no Contínuo representam atualmente uma alternativa consistente para a simulação numérica do comportamento de estruturas constituídas por materiais quase frágeis, onde a perda de rigidez em função da fissuração crescente é o fator preponderante da resposta não-linear de seus elementos estruturais. No entanto, modelos de dano apresentam forte dependência de parâmetros internos usados para descrever os critérios e evolução das variáveis de dano, que devem ser calibrados adequadamente para uma resposta mecânica coerente da estrutura. Neste contexto, o artigo mostra um estudo sobre a calibração de parâmetros do modelo de dano de Mazars e sua aplicação na análise numérica de vigas e pórticos planos em concreto armado. O Método dos Mínimos Quadrados é adotado para resolver o problema, em conjunto com a técnica de Gauss-Newton. Em virtude da ausência de resultados experimentais para diversas classes de resistência do concreto, como referência para o processo de calibração, são adotados alguns modelos constitutivos teóricos tanto à tração quanto à compressão. Esse processo de calibração de parâmetros é incorporado a um modelo mecânico em elementos finitos para análise de barras em concreto armado, com a consideração conjunta dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, como efeito de pino, armadura transversal e engrenamento de agregados. Uma lei constitutiva exponencial para o decaimento da resistência à tração do concreto é proposta com o objetivo de simular o comportamento do tipo *tension softening* do material. Testes de simulação envolvendo o modelo proposto foram realizados, comparando-se com resultados experimentais e numéricos mostrando a boa precisão e capacidade de obtenção de cargas últimas em estruturas de barras em concreto armado.

Palavras-chave: Mecânica do Dano; Concreto Armado; Mecanismos Complementares; Cisalhamento; Método dos Mínimos Quadrados; Calibração de Parâmetros.

1 Introdução

O concreto armado é um dos materiais estruturais mais utilizados na construção civil do mundo moderno. À medida que a tecnologia do concreto se desenvolve com a produção de materiais cada vez mais resistentes, leves e competitivos para o uso na confecção de estruturas civis, os modelos matemáticos também se desenvolvem para simular adequadamente o comportamento estrutural desses novos materiais. Diante desse contexto, modelos matemáticos cada vez mais precisos e complexos são desenvolvidos no âmbito do concreto armado, buscando representar precisamente o seu comportamento mecânico frente à ação das cargas externas.

A principal causa do comportamento não-linear do concreto decorre de sua perda de rigidez mediante a evolução da fissuração para níveis de carregamento crescentes. Dessa forma, modelos que levam em conta esse tipo de comportamento são candidatos adequados na escolha para a simulação mecânica de elementos estruturais em concreto armado. A Mecânica do Dano no Contínuo está inserida neste contexto, pois permite penalizar as propriedades elásticas do material, em função de uma variável de dano que define o grau de deterioração local, à medida que o carregamento cresce.

Em virtude dessa capacidade de penalização da rigidez do material pelo crescimento da fissuração, modelos de dano também podem ser ferramentas apropriadas para simular o comportamento de elementos

¹ Dr. Professor Assistente Doutor da Faculdade de Engenharia – UNESP – Campus de Bauru, cgnogueira@feb.unesp.br.

em concreto armado ao cisalhamento. Modelos que descrevem os fenômenos observados em decorrência das solicitações normais já estão consolidados na literatura, porém quando se trata dos mecanismos de transmissão de tensões de cisalhamento em elementos de concreto fissurado, esbarra-se na grande dificuldade do tema. Millard e Johnson 1984 avaliaram que é praticamente impossível de se estudar isoladamente os fenômenos de transferência de tensões de cisalhamento em elementos de concreto, tais como o efeito de pino e o engrenamento dos agregados (conhecidos como mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento), pois estes acontecem de forma intrínseca e em conjunto com outros fenômenos. No entanto, seu comportamento na transferência das tensões ao longo das faces dos elementos fissurados é importante na avaliação do comportamento global resistentes dos elementos em concreto armado. Diversos autores trabalharam e continuam trabalhando no tema, tais como: Dulacska (1972), Fardis e Buyukozturk (1979), Jimenez *et al.* (1979), Walraven (1981), Millard e Johnson (1984), Dei Poli *et al.* (1992), Zaris (1997) e Jélic *et al.* (1999) se dedicaram ao estudo fenomenológico desses mecanismos complementares para conceituar os fenômenos de transferência de tensões de cisalhamento, a interferência da fissuração, bem como a influência da quantidade de armadura longitudinal e transversal, propriedades do concreto, cobertura de armadura e diâmetro de agregados ao longo de todo o processo. Posteriormente, com base nos estudos anteriores, vieram os trabalhos que desenvolveram formulações matemáticas para simular esses comportamentos e sua introdução em códigos de análise numérica de estruturas baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF). He e Kwan (2001) propuseram um método escrito em função da teoria de vigas apoiadas em bases elásticas para representar o efeito de pino no interior de elementos em concreto armado. A formulação foi incorporada a um código de análise mecânica do MEF para a análise de vigas em concreto armado. Martín-Pérez e Pantazopoulou (2001) apresentaram um modelo aproximado para considerar o engrenamento dos agregados e o efeito de pino no processo de transferência de tensões de cisalhamento ao longo de elementos fissurados em concreto armado. Os autores concluíram que a rigidez ao cisalhamento, devido a esses mecanismos, diminui rapidamente à medida que a abertura das fissuras aumenta, mostrando forte dependência do estado de deformações dos materiais ao longo do processo de carregamento. Com isso, a contribuição dos agregados foi obtida como sendo uma função direta da deformação principal de tração no concreto, que pode ser entendida como um indicador da largura das fissuras. Através de um

processo de calibração do módulo de elasticidade transversal obtido em painéis fissurados de concreto armado, os autores estabeleceram uma relação entre o estado de fissuração e o valor atualizado do módulo de elasticidade transversal, penalizando assim o seu valor final para ser utilizado na simulação numérica via MEF.

Diante desse contexto, os modelos baseados na Mecânica do Dano apresentam-se interessantes para esse tipo de penalização das propriedades elásticas dos materiais, mediante crescimento da fissuração. Além disso, essa penalização da rigidez acontece de forma mais consistente, em função da evolução do estado de deterioração local do material, definido pela variável de dano. Dessa forma, o acoplamento direto entre o MEF, modelos de dano e modelos que permitam levar em consideração a presença dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento é uma tentativa na direção da obtenção de uma ferramenta computacional mais precisa para análise de estruturas em concreto armado.

Uma das desvantagens de abordagens via modelos de dano é a sua forte dependência de parâmetros internos que definem a evolução das variáveis que descrevem a danificação. Normalmente, esses parâmetros internos são obtidos através de resultados experimentais à tração e à compressão em corpos de prova de concreto, o que introduz mais uma dificuldade na sua obtenção, uma vez que não se tem resultados experimentais para todas as classes de resistência à compressão do concreto. Diante disso, modelos constitutivos teóricos que descrevem o comportamento dos materiais tanto à tração quanto à compressão aparecem como uma alternativa para prover esses resultados “experimentais” para posterior calibração dos parâmetros dos modelos de dano.

É neste contexto que este trabalho está inserido, pois tem como objetivo calibrar os parâmetros do modelo de dano de Mazars (1984), a partir de leis constitutivas teóricas para tração e compressão, para uso posterior em um modelo de análise estrutural não-linear via MEF, considerando os mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento do concreto armado. O processo de calibração baseia-se no Método dos Mínimos Quadrados Não-Linear, com o uso da técnica de Gauss-Newton (Lima 2009, Nogueira 2005 e Souza 2011). Trata-se, portanto, de um problema de otimização, onde deseja-se minimizar o erro relativo entre as respostas das leis constitutivas teóricas e aquelas obtidas com o modelo de dano, para obtenção de um conjunto de parâmetros internos coerentes para o modelo de dano. Em virtude da grande variabilidade dos resultados dos modelos teóricos à tração, propôs-se um modelo de decaimento exponencial para a resistência à tração do concreto, mais conservador, com o objetivo

de se obter limites inferiores para cargas últimas em estruturas de barras em concreto armado. Essa abordagem justifica-se, pois a partir da obtenção desses parâmetros, o modelo de dano é capaz de interagir adequadamente com as formulações dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, garantindo a sua consideração nas análises numéricas. Além disso, um modelo de contribuição da armadura transversal que depende diretamente do modelo de dano calibrado é também utilizado para completar os mecanismos resistentes ao cisalhamento (Sanchez Jr. e Venturini 2007, Nogueira *et al.* 2013). O modelo numérico foi testado comparando seu desempenho com resultados experimentais e numéricos de outros autores para verificação de sua capacidade.

2 Processo de Calibração via Método dos Mínimos Quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados procura um conjunto de parâmetros que minimize uma função erro global, F , dada por:

$$F(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f_i(U, X)]^2 \quad (1)$$

onde: U é o conjunto de variáveis do problema que não será otimizado; X é o conjunto de parâmetros que será calibrado; n é o número de pontos conhecidos do ensaio experimental ou da lei constitutiva teórica. A função f corresponde ao erro local definido pela diferença entre as respostas conhecidas, Y , e as respostas que dependem dos parâmetros calibrados e, portanto, ainda desconhecidas, Y' .

Dessa forma, a função erro local pode ser escrita como $f_i(U, X) = Y_i - Y'_i(X)$. O processo de calibração é iterativo (m iterações), tendo início com uma estimativa dos parâmetros, $X = X_0$ e prosseguindo até que a condição $F(X_{m+1}) \leq F(X_m)$ seja verificada, onde $X_{m+1} = X_m + H$. O vetor H contém as coordenadas da direção de descida da função F na iteração m em direção ao ponto de mínimo. A função $F(X_{m+1})$ para esse efeito pode ser aproximada por meio de uma expansão em série de Taylor conforme:

$$F(X + H) = F(X) + H^T G + \frac{1}{2} H^T Q H \quad (2)$$

onde G é o gradiente da função F ; Q é a matriz hessiana da função F ; G o gradiente e a matriz hessiana da função erro global são dados por:

$$G(X) = F'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F(X)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(X)}{\partial x_k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Q(X) = F''(X) = \quad (4)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k \partial x_k} \end{bmatrix}$$

Se X corresponde às coordenadas do ponto de mínimo da função F , então a norma do vetor H deve ser menor do que uma tolerância pré-estabelecida e a condição $G(X) = 0$ deve ser satisfeita. Para que o vetor H represente uma direção de descida no processo de busca, a condição $H^T G < 0$ também deve ser respeitada.

Com o objetivo de facilitar a formulação do problema, é possível escrever o gradiente da função F diretamente a partir da função de erro local f , uma vez que essa função é que de fato relaciona a resposta conhecida com a resposta que se deseja obter, que é função do conjunto de parâmetros procurados. Admitindo que f e suas derivadas são contínuas no domínio de busca da solução ótima, é possível escrever para cada termo do gradiente G a seguinte soma:

$$G_k(X) = f_1(X) \cdot \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_k} + \dots + \quad (5)$$

$$+ f_n(X) \cdot \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n f_i(X) \cdot \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_k}$$

onde k corresponde ao contador de parâmetros otimizados; i representa o contador dos pontos conhecidos do ensaio experimental ou da lei teórica adotada.

Chamando $\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_k}$ de Jacobiano transposto $J^T(X)$ da transformação, é possível escrever:

$$G(X) = J^T(X) \cdot f(X) \quad (6)$$

Da mesma forma, a matriz hessiana também pode ser reescrita em função de f conforme:

$$Q_k(X) = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_j \partial x_k} = f(X) \quad (7)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_k} + f_i(X) \cdot \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_j \partial x_k} \right]$$

onde j também corresponde ao contador de parâmetros otimizados. Na forma contraída, a hessiana resulta em:

$$Q_k(X) = J^T(X) \cdot J(X) + \sum_{i=1}^n f_i(X) f_i''(X) \quad (8)$$

A solução do problema definido pela Equação (1) é obtida aplicando-se a técnica de Gauss-Newton que consiste em construir uma aproximação linear para a função $f(X)$ na vizinhança de X . Para valores pequenos do vetor H , a expansão em série de Taylor pode ser escrita como:

$$J_{CT} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{V} \quad (9)$$

Substituindo a Equação (9) na (2) obtêm-se:

$$F(X+H) \cong L(H) = F(X) + \quad (10)$$

$$H^T \cdot J^T(X) \cdot f(X) + \frac{1}{2} H^T \cdot J^T(X) \cdot J(X) \cdot H$$

onde $L(H)$ é o Lagrangeano da função F .

Assim, o problema de minimização consiste em encontrar a direção de descida H que minimiza $L(H)$. O vetor gradiente e a matriz hessiana considerando o Lagrangeano são dados agora, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} L'(H) &= J^T(X) \cdot f(X) + J^T(X) \cdot J(X) \cdot H \\ L''(H) &= J^T(X) \cdot J(X) \end{aligned} \quad (11)$$

Se H é muito próximo de zero, então $L'(H) = F'(X)$. Se as colunas da matriz do Jacobiano forem

linearmente independentes, então a matriz $L''(H)$ é positiva definida, o que garante que $L(H)$ tem um ponto de mínimo dado por:

$$\begin{aligned} L'(H) &= 0 \\ J^T(X) \cdot f(X) + J^T(X) \cdot J(X) \cdot H &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

O vetor H pode então ser calculado pela solução do seguinte sistema de equações:

$$\left[J^T(X) \cdot J(X) \right] \cdot H = -J^T(X) \cdot f(X) \quad (13)$$

A condição que define se o vetor H é uma direção de descida é escrita por:

$$-H^T \cdot \left[J^T(X) \cdot J(X) \right] \cdot H < 0 \quad (14)$$

Ao final da iteração m , o vetor X é atualizado somando-se aos seus valores, o vetor H e o processo é reiniciado até atingir a convergência.

3 Leis Constitutivas para o Concreto

As leis constitutivas representam o comportamento do material através do seu diagrama tensão \times deformação frente à solitação considerada. No caso do concreto, na falta de resultados experimentais para diversas classes de resistência à compressão, as leis constitutivas podem ser utilizadas para fornecer a resposta do material tanto à tração, quanto à compressão. A partir desses resultados de tensão \times deformação específica para um conjunto de classes de resistência, os parâmetros de dano são calibrados através do processo descrito na seção anterior deste trabalho.

Para o comportamento do concreto à compressão, foi adotada a lei constitutiva proposta por Popovics (1973), que é expressa por:

$$\sigma_{cc} = \sigma_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{n}{n-1 + (\varepsilon/\varepsilon_0)^n} \quad (15)$$

onde σ_{cc} é a tensão de compressão após o pico de resistência; σ_0 corresponde à resistência à compressão do concreto em psi; ε é a deformação atual; ε_0 é a deformação específica correspondente à tensão σ_0 , dada por

$\varepsilon_0 = 2,7 \times 10^{-4} \sqrt[4]{\sigma_0}$; n é função da resistência do concreto, dada por $n = 4 \times 10^{-4} \sigma_0 + 1$. A Figura 1 ilustra as respostas do concreto à compressão com o uso da lei de Popovics para classes de resistência de 20, 30, 40 e 50 MPa.

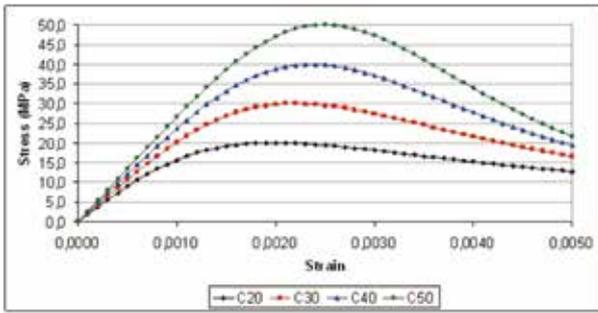


Figura 1 – Lei constitutiva do concreto à compressão.

Para o comportamento do concreto à tração, foram adotadas três leis constitutivas diferentes: Figueiras (1983), Collins e Vecchio (1986) e Stramandinoli e La Rovere (2008). As equações de cada modelo foram reunidas na Tabela 1 e os parâmetros utilizados em cada um dos modelos foram escritos na Tabela 2.

Tabela 1 – Leis constitutivas para o concreto à tração.

Modelo	Equação
Figueiras	$\sigma_{CT} = \alpha \cdot f_{CT} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_U} \right) \Rightarrow \varepsilon > \varepsilon_{CT}$ $\sigma_{CT} = E_C \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq \varepsilon_{CT}$
Vecchio e Collins	$\sigma_{CT} = \frac{f_{CT}}{1 + \sqrt{500\varepsilon}}$
Stramandinoli e La Rovere	$\sigma_{CT} = a \cdot e^{b \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_U} \right)}$

Tabela 2 – Parâmetros utilizados nas leis constitutivas.

Modelo	Parâmetros
Figueiras	$0.5 \leq \alpha \leq 0,7$ $\varepsilon_U = 0,002$
Vecchio e Collins	–
Stramandinoli e La Rovere	$\beta = 0,017 + 0,255n\rho - 0,106(n\rho)^2 + 0,016(n\rho)^3$ $n = E_s/E_C ; \rho = A_s/A_C$

onde: σ_{CT} é a tensão de tração atual no concreto; f_{CT} é a resistência do concreto à tração; α é o coeficiente que considera a contribuição do concreto entre fissuras ou *tension stiffening*; ε é a deformação longitudinal atual; ε_{CT} é a deformação correspondente à f_{CT} ; ε_U é a deformação última à tração; β é o parâmetro de decaimento da tensão e que depende da taxa de armadura e da relação, n , entre os módulos de elasticidade longitudinais do aço, E_s e do concreto, E_C ; ρ é a taxa geométrica de armadura dada pelo quociente entre área de armadura, A_s e área da seção transversal de concreto, A_C . A resistência à tração, f_{CT} pode ser calculada, por exemplo, com o modelo proposto pela ABNTNBR 6118:2006 dado por $f_{CT} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_c^2}$, onde f_c é a resistência do concreto à compressão em MPa.

É interessante destacar que os três modelos citados definem um trecho pós-pico de tração, que corresponde à capacidade do concreto, após atingir o limite de resistência, de absorver ainda tensões de tração. Essas leis constitutivas tanto à tração, quanto à compressão são utilizadas para obter o comportamento do concreto em termos de diagrama tensão \times deformação, fornecendo os valores de Y da função f de erro local do problema de otimização.

4 Proposta de Lei Constitutiva à Tração

A ideia básica do modelo constitutivo proposto neste trabalho é levar em consideração o comportamento *detension stiffening*, ou seja, do trecho pós-pico do comportamento à tração, a partir de um modelo de decaimento exponencial contínuo desde o pico de resistência até o escoamento da armadura tracionada. A principal diferença entre o modelo proposto e o modelo descrito por Stramandinoli e La Rovere é que o segundo considera a influência da taxa de armadura de flexão e o primeiro não.

O modelo segue um critério analítico simples: após a fase elástica de tração que se encerra com a tensão normal atingindo a resistência do concreto à tração, adota-se uma fase de decaimento exponencial da tensão até o nível de deformação que provoca escoamento da armadura tracionada. Assim, a expressão que define a lei constitutiva após o pico de resistência é dada por:

$$\sigma_{CT} = a \cdot e^{b \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_U} \right)} \tag{16}$$

onde ε_U é a deformação específica longitudinal que corresponde ao escoamento da armadura tracionada e dada por $0,002 = 0,2\%$.

Os coeficientes a e b foram obtidos de acordo com as condições de contorno da própria lei constitutiva, isto é:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_{CT} &\Rightarrow \sigma_{CT} = f_{CT} \\ \varepsilon = \varepsilon_U &\Rightarrow \sigma_{CT} = \psi \cdot f_{CT} \end{aligned} \quad (17)$$

onde ψ indica a porcentagem da resistência do concreto à tração remanescente para a deformação longitudinal de escoamento da armadura tracionada. Dessa forma, o valor de ψ pode ser adotado conforme resultados experimentais ou adotado muito pequeno para simular uma situação de ruptura à tração. Para as aplicações neste trabalho, o fator ψ foi adotado como sendo 0,01 = 1% de f_{CT} .

Com isso, os coeficientes propostos no modelo são escritos por:

$$a = \frac{\psi \cdot f_{CT}}{e^{\frac{\ln(\psi)}{1-m}}} \quad (18)$$

$$b = \frac{\ln(\psi)}{1-m}$$

onde m é a relação entre as deformações do pico de resistência à tração e última referente ao escoamento da armadura tracionada, dada por $m = \varepsilon_{CT} / \varepsilon_U$.

As Figuras 2 e 3 mostram os resultados da lei constitutiva à tração proposta neste trabalho para diferentes classes de resistência à compressão do concreto e uma comparação da lei proposta com as demais leis consideradas no estudo para a classe C20, respectivamente. Na Figura 3, a legenda corresponde a: FG (lei de Figueiras), VC (lei de Vecchio e Collins), SL (lei de Stramandinoli e La Rovere) e NG (lei proposta neste trabalho).

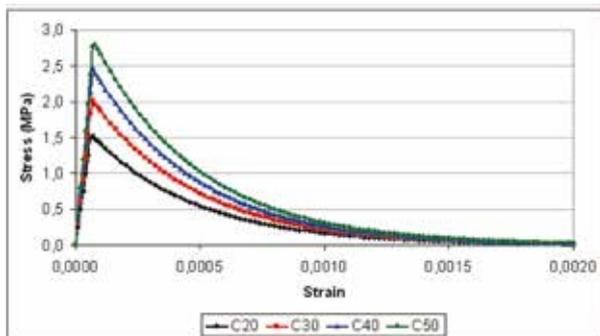


Figura 2 – Lei constitutiva proposta para o concreto à tração.

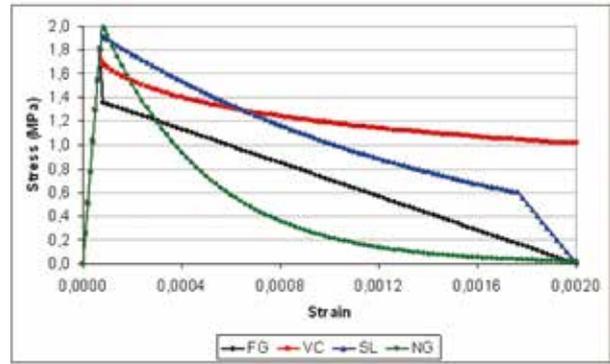


Figura 3 – Comparação entre os resultados das leis constitutivas à tração para classe C20.

Conforme pode-se observar na Figura 3, o modelo proposto apresenta um decaimento acentuado na tensão normal de tração após o pico de resistência caracterizado pela lei de decaimento exponencial, uma vez que o modelo não considera qualquer interferência da armadura longitudinal.

5 Resolução do Problema

A resolução do problema da calibração dos parâmetros do modelo de dano de Mazars para o concreto tanto à tração, quanto à compressão é escrita pela Equação (1) com $f_i(U, X) = Y_i - Y_i'(X)$. As funções Y e Y' são definidas, respectivamente, pelas leis constitutivas teóricas já descritas e pela lei constitutiva escrita pelo modelo de dano, que é função dos parâmetros a serem calibrados. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} Y'_C &= f_C(U, X) = \sigma_{CC} - [1 - D(X_C)] E \varepsilon_{CC} \\ Y'_T &= f_T(U, X) = \sigma_{CT} - [1 - D(X_T)] E \varepsilon_{CT} \end{aligned} \quad (19)$$

onde σ_{CC} e σ_{CT} são, respectivamente, as tensões de compressão obtidas com a lei de Popovics e as tensões de tração obtidas com as leis descritas nas seções anteriores; E é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto; ε_{CC} e ε_{CT} são, respectivamente, as deformações específicas à compressão e à tração; D é a variável de dano do modelo, que é função dos parâmetros calibrados; X_C e X_T são os vetores que contém os parâmetros de compressão (A_C e B_C) e os parâmetros de tração (A_T e B_T), respectivamente.

Portanto, a solução do problema consiste em determinar os parâmetros de dano A_C , B_C , A_T e B_T que sejam capazes de representar uma dada classe de resistência do concreto, assumindo como referência as leis constitutivas teóricas para o comportamento do material.

6 O Modelo Mecânico

O objetivo do processo de calibração descrito até aqui é obter um conjunto de parâmetros para o modelo de dano de Mazars para qualquer classe de resistência à compressão do concreto. Isso permite que estruturas planas de barras como vigas e pórticos sejam analisados de forma mais precisa, onde o modelo de dano é calibrado para a resistência utilizada na estrutura, aumentando a precisão e consistência dos resultados. O modelo mecânico baseia-se no método dos elementos finitos com formulação em deslocamentos e elemento de pórtico plano com três graus de liberdade por nó, sendo duas translações e uma rotação. O modelo de dano de Mazars é utilizado para representar o comportamento não-linear do concreto, enquanto que um modelo elastoplástico com encruamento isótropo linear positivo é adotado para o aço das armaduras longitudinal e transversal. A não linearidade geométrica é considerado a partir da escrita da deformação de Green e o tensor de tensões conjugado de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Além disso, são incorporados ao programa computacional os modelos de mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, como o efeito de pino, engrenamento de agregados e contribuição da armadura transversal. É interessante salientar que todos esses modelos complementares foram escritos de forma compatível com o modelo de dano, daí a necessidade de se obter parâmetros mais consistentes para simular o comportamento do concreto. Dessa forma, todos esses modelos foram reunidos e implementados de forma consistente em um código de elementos finitos com elementos de pórtico plano, que é um elemento de barra bastante simples e estável, tornando o modelo mecânico desenvolvido uma ferramenta robusta e ao mesmo tempo simples, já que faz uso de um elemento finito unidimensional convencional.

Todos os detalhes do modelo mecânico utilizado neste trabalho podem ser observados em Nogueira et al. (2011) e Nogueira et al. (2013), especialmente os modelos de dano, plasticidade e mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento. A descrição completa do modelo foi omitida neste trabalho, pois além da necessidade de muitas páginas, não é o foco principal do estudo. A seguir, são apresentados apenas os conceitos mais importantes sobre o modelo de dano de Mazars para o bom entendimento do estudo.

A lei constitutiva definida pelo modelo de dano é mostrada na Figura 4, onde destaca-se a perda de rigidez do material em função da variável que define a evolução do estado de degradação do material ou dano, D .

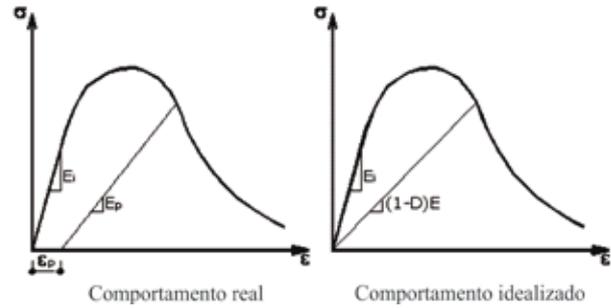


Figura 4 – Lei constitutiva idealizada pelo modelo de dano para o concreto à compressão.

Após a resolução do sistema de equações do MEF, as deformações são verificadas em cada um dos pontos de integração ao longo do comprimento e da altura de cada elemento finito. A partir dessas deformações, define-se um valor de deformação equivalente para o critério de dano, que é escrito em termos da resistência do concreto à tração, uma vez que o modelo de Mazars considera que a evolução do dano se dá apenas por tração do material. Com isso, as tensões normais, σ e de cisalhamento, τ em cada ponto de integração são calculadas por:

$$\begin{aligned}\sigma &= (1-D)E\varepsilon \\ \tau &= (1-D)G\gamma\end{aligned}\quad (20)$$

onde D é a variável de dano; E e G são, respectivamente, os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do concreto; ε e γ são, as deformações específicas normal e de cisalhamento medidas em cada ponto de integração da seção transversal.

A variável de dano é calculada, após a verificação do critério de danificação, por:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (21)$$

onde D_T e D_C são, respectivamente, as variáveis de dano à tração e à compressão do modelo; α_T e α_C correspondem, respectivamente, à parcela de contribuição no dano por tração e por compressão em cada ponto de integração, de modo que a sua soma é igual a unidade.

Finalmente, as variáveis de dano à tração e à compressão são obtidas pelas funções que dependem dos parâmetros calibrados, conforme:

$$\begin{aligned}D_T &= 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{[B_T(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{d0})]}} \\ D_C &= 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1-A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{[B_C(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{d0})]}}\end{aligned}\quad (22)$$

A grandeza $\tilde{\epsilon}$ é a deformação específica equivalente definida em termos do estado de deformações principais em cada ponto de integração. A deformação específica ϵ_{d0} corresponde ao valor de deformação referente à resistência à tração do concreto.

7 Aplicações Numéricas

7.1 Exemplo 1

Neste exemplo, foram analisadas duas vigas em concreto armado submetidas a ensaio de flexão em quatro pontos, cujo principal objetivo foi comparar a resposta numérica, obtida com os coeficientes calibrados do modelo de dano, com os resultados experimentais.

As Figuras 5 e 6 mostram, respectivamente, a geometria de cada viga, bem como as cargas aplicadas e a malha de elementos finitos adotada conforme as especificações encontradas nos trabalhos de Alvares (1993) e Juvandes (1999).

Mazars (1984) propôs uma faixa de variação para os parâmetros do modelo de dano conforme mostrado na Tabela 3:

Tabela 3 – Faixa de variação dos parâmetros do modelo de dano de Mazars.

Intervalo	A_C	B_C	A_T	B_T
Mínimo	1,00	1000,0	0,70	10000,0
Médio	1,25	1500,0	0,85	55000,0
Máximo	1,50	2000,0	1,00	100000,0

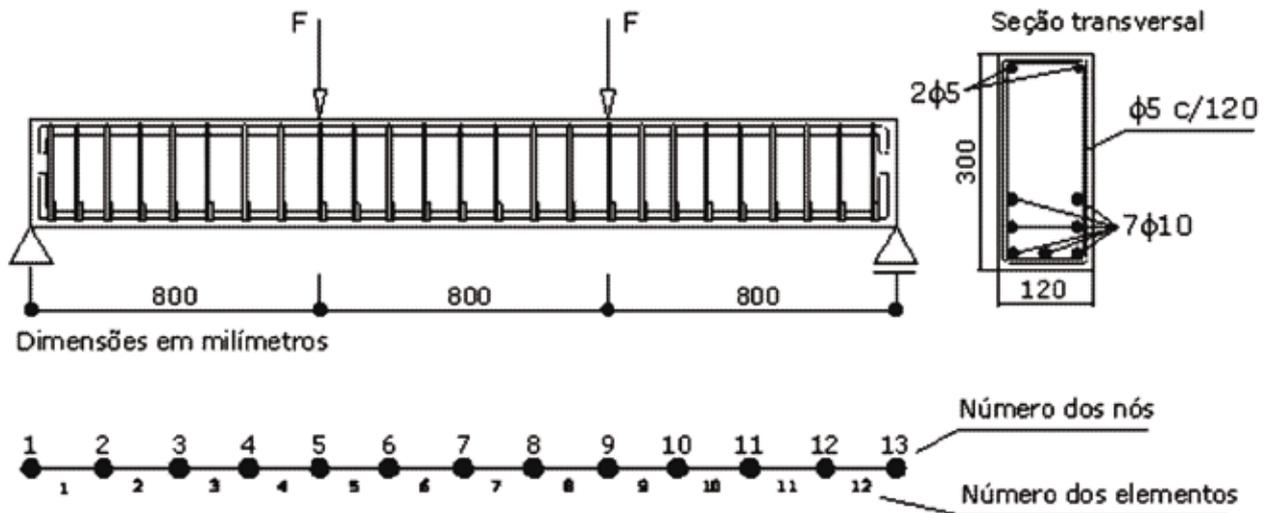


Figura 5 – Viga ensaiada por Alvares (1993).

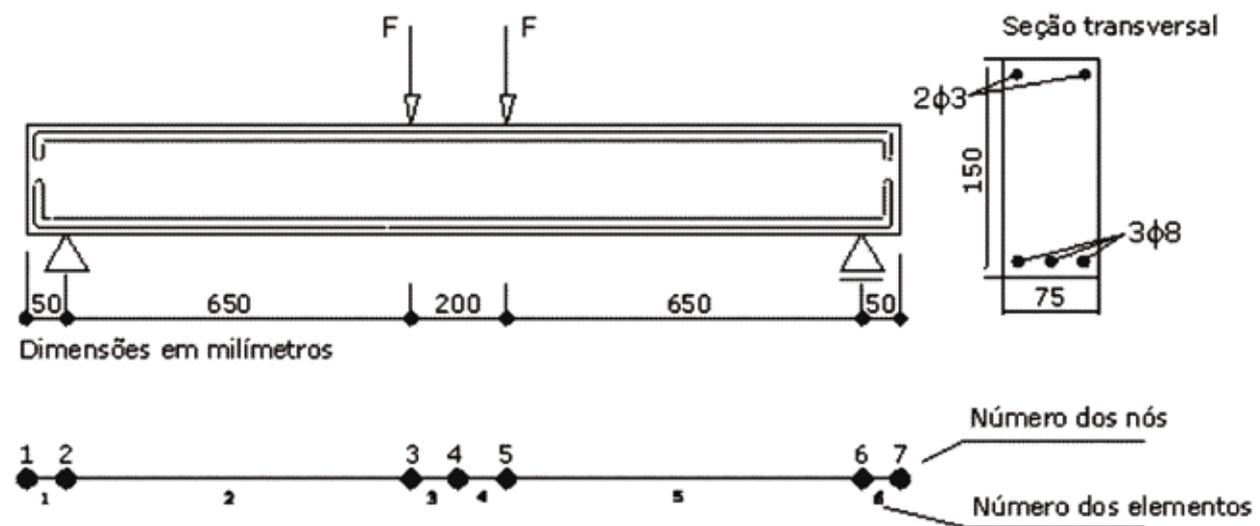


Figura 6 – Viga ensaiada por Juvandes (1999).

Para os parâmetros de tração do modelo de dano de Mazars, A_T e B_T , foram considerados sete casos: mínimo (Tmin), médio (Tmid), máximo (Tmax), Figueiras (TF), Collins e Vecchio (TVC), Stramandinoli e La Rovere (TSL) e o modelo exponencial proposto neste trabalho (TN). Os parâmetros de compressão foram calibrados considerando o modelo de Popovics e repetidos para todas as análises.

Com relação à análise não linear, os seguintes parâmetros foram adotados.

- Esquema de Newton-Raphson com matriz tangente;
- Hipótese de Timoshenko para consideração dos modelos complementares de resistência ao cisalhamento;
- Resposta elasto-plástica do aço com módulo plástico $K = 1\% E$;
- Coeficiente de Poisson para o concreto igual a 0.2;
- 6 pontos de integração de Gauss ao longo do comprimento dos elementos finitos;
- 20 pontos de integração de Gauss ao longo da altura dos elementos finitos;
- Tolerância em forças e deslocamentos para a consideração do equilíbrio de 10^{-5} .

As propriedades elásticas dos materiais adotadas

nas análises das vigas, bem como os parâmetros internos do modelo de Stramandinoli e La Rovere estão listadas nas Tabelas 4 e 5, respectivamente.

As Tabelas 6 e 7 reúnem, respectivamente, os parâmetros do modelo de dano à compressão e à tração calibrados com cada lei constitutiva teórica descrita neste trabalho. O valor da deformação inicial, ϵ_{d0} , para a qual o concreto começa a sofrer danificação no modelo de dano de Mazars foi obtido para cada caso através da razão f_T/E_C .

Tabela 6 – Parâmetros do modelo de dano à compressão.

Viga	Popovics	
	A_C	B_C
Alvares	0,9371	1531,45
Juvandes	0,8758	1326,29

A Figura 7 mostra a lei constitutiva à tração do concreto obtida pelo modelo de dano calibrado para cada lei teórica considerando as propriedades elásticas da viga de Alvares, bem como com a adoção dos parâmetros mínimos, médios e máximos propostos por Mazars.

Tabela 4 – Propriedades dos materiais utilizados nas vigas.

Viga	Concreto				Aço	
	f_C (MPa)	f_T (MPa)	E_C (MPa)	G_C (MPa)	f_S (MPa)	E_S (MPa)
Alvares	27,0	1,89	29098,0	12120,0	430,0	196000,0
Juvandes	37,9	2,90	36313,0	15130,0	497,0	195000,0

Tabela 5 – Parâmetros internos do modelo de Stramandinoli e La Rovere.

Viga	ϵ_0	n	ρ (%)	α
Alvares	0,0020	6,73	1,52	0,042
Juvandes	0,0023	5,73	4,47	0,072

Tabela 7 – Parâmetros do modelo de dano à tração.

Viga	Figueiras		Collins e Vecchio		Stramandinoli e La Rovere		Modelo proposto	
	A_T	B_T	A_T	B_T	A_T	B_T	A_T	B_T
Alvares	0,7249	11263,71	0,4239	13847,11	0,6967	7991,04	0,9062	9325,47
Juvandes	0,7286	9350,40	0,4413	11981,10	0,7168	6793,41	0,9156	8406,73

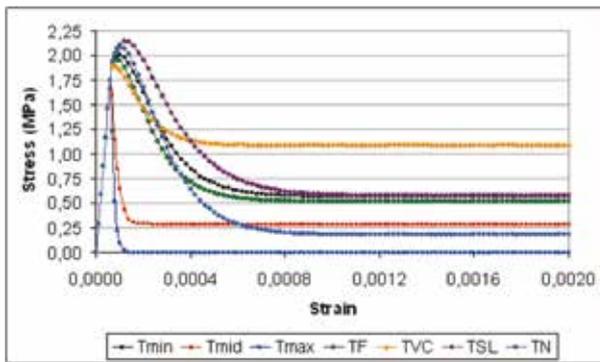


Figura 7 – Diagrama tensão \times deformação específica para o concreto à tração.

A resposta obtida com os parâmetros médios e máximos do intervalo de variação proposto por Mazars mostraram uma representação muito pobre para o fenômeno do *tension stiffening* do concreto. Por outro lado, o resultado obtido com a lei de Collins e Vecchio superestimou a contribuição do concreto no trecho pós-pico. Os demais modelos apresentaram maior proximidade entre si, especialmente no trecho descendente da curva. O modelo proposto apresentou uma resistência residual menor do que os demais em virtude da consideração do parâmetro m igual a 1% da resistência à tração do concreto como valor indicativo encontrado para a tensão no escoamento da armadura tracionada, o que penalizou bastante a resposta do concreto à tração.

As Figuras 8 e 9 ilustram, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio para a viga de Alvares considerando os parâmetros calibrados com as leis constitutivas descritas no trabalho e, em seguida, com os valores mínimos, médios e máximos propostos por Mazars.

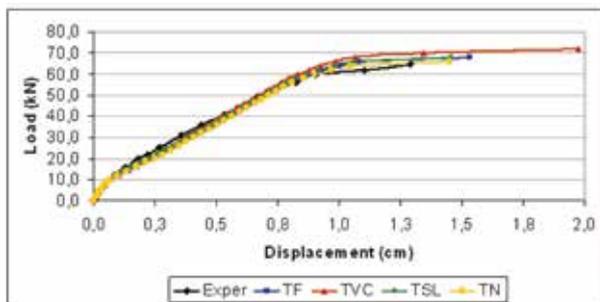


Figura 8 – Curva carga \times deslocamento no meio do vão: viga de Alvares.

De um modo geral, todos os resultados obtidos para essa viga foram bastante satisfatórios. Como era esperado, o modelo de Collins e Vecchio proporcionou um comportamento mais resistente para a viga do que os demais, em função de sua maior contribuição no trecho pós-pico para as tensões de tração do concreto.

A carga última obtida no ensaio experimental resultou em 65kN, enquanto que os resultados encontrados com o modelo proposto e o de Stramandinoli e La Rovere foram, respectivamente, 66kN e 68kN (Figura 8). A consideração dos valores mínimo, médio e máximo para os parâmetros de tração também forneceram respostas bastante razoáveis para o comportamento global da estrutura, conforme pode ser observado na Figura 9.

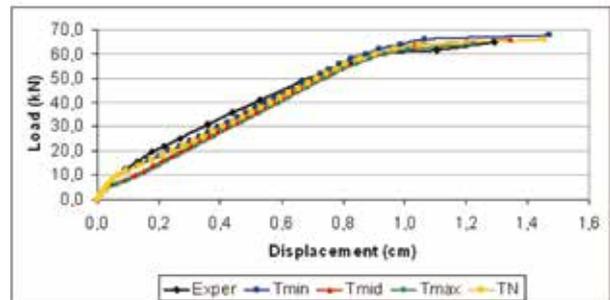


Figura 9 – Curva carga \times deslocamento no meio do vão: viga de Alvares.

As Figuras 10 e 11 ilustram, respectivamente, as trajetórias de equilíbrio para a viga ensaiada por Juvandes considerando os parâmetros calibrados com as leis constitutivas descritas no trabalho e, em seguida, com os valores mínimos, médios e máximos propostos por Mazars.

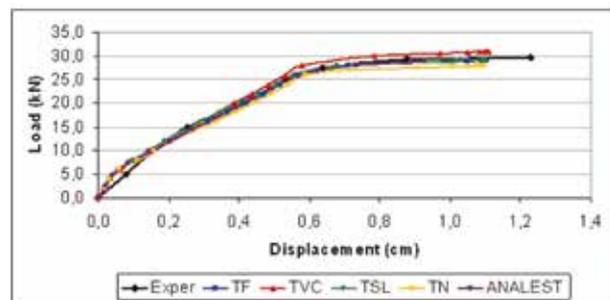


Figura 10 – Curva carga \times deslocamento no meio do vão: viga de Juvandes.

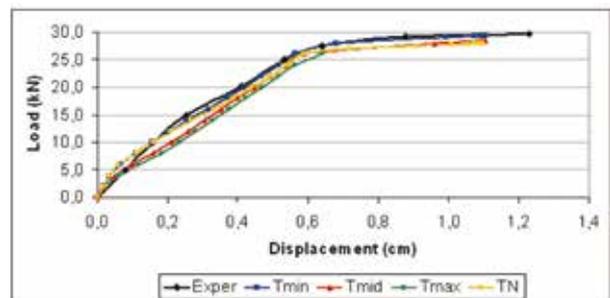


Figura 11 – Curva carga \times deslocamento no meio do vão: viga de Juvandes.

A curva denominada ‘ANALEST’ corresponde à própria resposta produzida no trabalho de Stramandinoli e La Rovere (2008). Conforme pode ser observado na Figura 10, os resultados obtidos com a calibração realizada em função dos modelos de Figueiras (TF) e Stramandinoli e La Rovere (TSL) mostraram-se mais adequados a esse exemplo. A resposta obtida com o modelo de Collins e Vecchio (TVC) novamente ficou acima da curva experimental, ao passo que a resposta fornecida pelo modelo proposto resultou abaixo do experimento. Isso se explica pelo maior decaimento da tensão de tração no concreto após o pico de resistência à tração, o que resulta em menor contribuição do *tension stiffening* no comportamento global da estrutura. Os resultados considerando os valores mínimo, médio e máximo, conforme Figura 11, novamente mostraram-se bastante razoáveis para esse exemplo.

7.2 Exemplo 2

A estrutura analisada neste exemplo é um pórtico em concreto armado ensaiado por Vecchio e Emara (1992), conforme ilustra a Figura 12. O objetivo do estudo também foi o de verificar o comportamento do modelo de calibração de parâmetros e o modelo mecânico para o caso de uma estrutura de pórtico. Em função das duas cargas verticais fixas no topo de cada pilar no valor de 700kN, para simular a existência de outros pavimentos acima do pórtico e, como a carga controlada é horizontal, foi adotada a não-linearidade geométrica (Nogueira 2010), de modo a considerar o equilíbrio da estrutura na posição deslocada em cada passo de carga. A carga horizontal foi aplicada em incrementos de 5kN cada e a discretização foi realizada de forma a considerar a influência da viga rígida de fundação executada no ensaio (Figura 13).

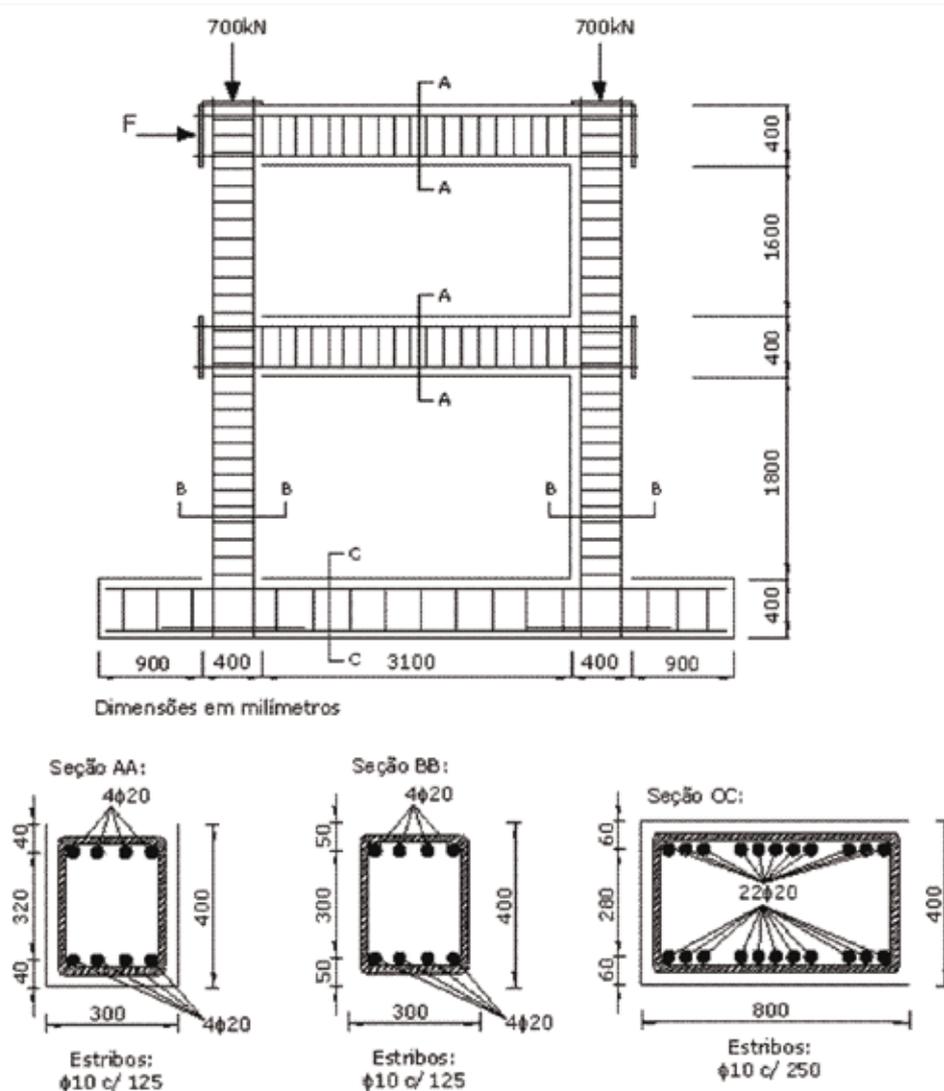


Figura 12 – Esquema geral do pórtico ensaiado por Vecchio e Emara (1992).

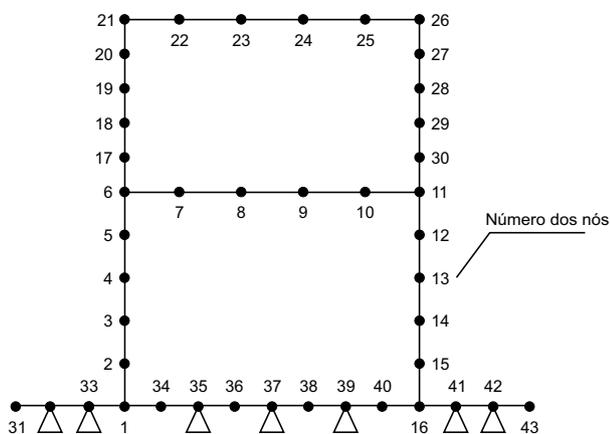


Figura 13 – Malha de elementos finitos adotada considerando a viga de fundação.

As propriedades elásticas dos materiais utilizadas na análise, bem como os parâmetros da lei constitutiva à tração para o concreto proposta por Stramandinoli e La Rovere e o conjunto de parâmetros de dano calibrados para cada lei constitutiva estão, respectivamente nas Tabelas 8, 9, 10 e 11.

Tabela 9 – Parâmetros do modelo de Stramandinoli e La Rovere.

ϵ_0	n	ρ (%)	α
0,002	8,13	2,0	0,056

É importante ressaltar que a taxa de armadura longitudinal utilizada no modelo de Stramandinoli e

Tabela 8 – Propriedades dos materiais utilizados na análise.

Concreto			Aço		
f_c (MPa)	f_T (MPa)	E_c (MPa)	G_c (MPa)	f_s (MPa)	E_s (MPa)
30,0	2,30	23674,0	9864,0	418,0	192500,0

Tabela 11 – Parâmetros do modelo de dano à tração.

Figueiras		Collins e Vecchio		Stramandinoli e La Rovere		Modelo proposto	
A_T	B_T	A_T	B_T	A_T	B_T	A_T	B_T
0,7493	8620,53	0,4296	11881,92	0,5414	5899,68	0,9242	7661,73

Tabela 12 – Valores de carga lateral última para o pórtico.

	Experimental	Tmin	TF	TVC	TSL	TN
Carga última (kN)	329,66	346,87	343,12	368,12	360,16	329,06

La Rovere, ρ , foi considerada constante e adotada para todos os elementos finitos conforme a taxa encontrada nas vigas e nos pilares.

Tabela 10 – Parâmetros do modelo de dano à compressão.

Popovics	
A_c	B_c
1,3688	1528,89

As Figuras 14 e 15 mostram os resultados das análises numéricas utilizando os parâmetros de dano calibrados e os valores mínimo, médio e máximo para a tração, respectivamente. Os modelos TVC e TSL mostraram-se mais rígidos do que os modelos de Figueiras (TF) e o proposto neste trabalho, resultando em valores finais de carga última do pórtico maiores. O modelo de dano calibrado com a lei constitutiva à tração exponencial proposta apresentou excelente capacidade de representação da carga última da estrutura, conforme pode ser observado na Tabela 12. Com relação aos parâmetros mínimos, médios e máximos do intervalo de variação proposto por Mazars, verificou-se a perda de convergência do modelo numérico com o uso dos valores médios e máximos.

Conforme pode ser observado, o modelo mecânico em elementos finitos combinado com o processo de calibração de parâmetros de dano mostrou-se capaz de representar adequadamente o comportamento das estruturas analisadas, especialmente no tocante à captura da carga última.

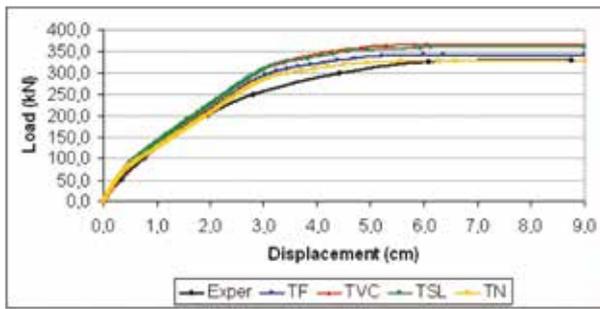


Figura 14 – Curva carga \times deslocamento horizontal do topo do pórtico: parâmetros calibrados.

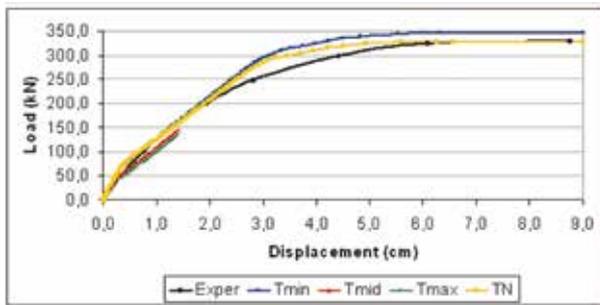


Figura 15 – Curva carga \times deslocamento horizontal do topo do pórtico: parâmetros fixados

8 Conclusões

Este estudo apresentou um processo de calibração de parâmetros a partir do Método dos Mínimos Quadrados e da técnica de Gauss-Newton aplicado à obtenção dos parâmetros do modelo de dano de Mazars para o concreto. O objetivo do trabalho foi propor uma forma sistemática de se obter os parâmetros internos do modelo de dano para qualquer classe de resistência à compressão do concreto, com o uso de leis constitutivas teóricas, no caso da ausência de resultados experimentais. A técnica foi acoplada a um modelo mecânico em elementos finitos unidimensionais, que considera o comportamento não linear dos materiais e geométrico da estrutura com um todo, bem como os mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento, como o efeito de pino, engrenamento dos agregados e contribuição da armadura transversal.

Os resultados mostraram estabilidade no processo de calibração de parâmetros com a técnica de Gauss-Newton, de forma que sempre foi possível obter um conjunto de parâmetros para as classes de concreto consideradas. Observou-se também que os intervalos de variação dos parâmetros internos propostos por Mazars podem ser ampliados, visto que foram obtidos valores para os parâmetros fora desses intervalos e ainda

assim apresentaram bons resultados na modelagem do comportamento das vigas e do pórtico.

O modelo puramente analítico com decaimento exponencial para o trecho pós-pico da curva de tração proposto neste trabalho, embora bastante simples, mostrou-se eficaz na representação do comportamento mecânico das estruturas analisadas, especialmente na captura da carga última. E finalmente, como última conclusão importante, destaca-se a capacidade dos valores mínimos dos parâmetros delimitados nos intervalos propostos por Mazars em representar satisfatoriamente o comportamento estrutural, conforme observado nos exemplos deste trabalho. Dessa forma, em casos onde não se têm os parâmetros do modelo de dano, a adoção dos valores mínimos torna-se razoável e pode ser empregada.

9 Referências Bibliográficas

- ALVARES, M. S. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.
- COLLINS, M. P.; VECCHIO, F. J. The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal*, Vol. 83, nº. 2, p. 219-231, 1986.
- DEI POLI, S.; DI PRISCO, M.; GAMBAROVA, P. G. Shear response, deformations and subgrade stiffness of a dowel bar embedded in concrete. *ACI Structural Journal*, Vol. 89, nº. 6, p. 665-675, 1992.
- DULACSKA, H. Dowel action of reinforcement crossing cracks in concrete. *ACI Journal*, Proceedings, Vol. 69, nº. 12, p. 754-757, 1972.
- FARDIS, M. N.; BUYUKOZTURK, O. Shear transfer model for reinforced concrete. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 105, nº. EM2, p. 255-275, 1979.
- FIGUEIRAS, J. A. Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1983.
- HE, X. G.; KWAN, K. H. Modelling dowel action of reinforcement bars for finite element analysis of concrete structures. *Computers and Structures*, Vol. 79, p. 595-604, 2001.
- JELIC, I.; PAVLOVIC, M. N.; KOTSOVOS, M. D. A study of dowel action in reinforced concrete beams. *Magazine of Concrete Research*, Vol. 51, nº. 2, p. 131-141, 1999.
- JIMENES, R.; WRITE, R. N.; GERGELY, P. Bond and

- dowel capacities of reinforced concrete. ACI Journal, Vol. 76, nº. 1, p. 73-92, 1979.
- JUVANDES, L. F. P. Reforço e reabilitação de estruturas de betão usando materiais compósitos de CRFP. Ph.D. Thesis, University of Porto, Portugal, 1999.
- LIMA, R. Q. Identificação de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados não-linear. Relatório de Iniciação Científica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2009.
- MARTÍN-PEREZ, B.; PANTAZOPOULOU, S. J. Effect of bond, aggregate interlock, and dowel action on the shear strength degradation of reinforced concrete. Engineering Structures, Vol. 23, p. 214-227, 2001.
- MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Paris, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, 1984.
- MILLARD, S. G.; JOHNSON, R. P. Shear transfer across cracks in reinforced concrete due to aggregate interlock and to dowel action. Magazine of Concrete Research, Vol. 36, nº. 126, p. 9-21, 1984.
- NOGUEIRA, C. G. Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2010.
- NOGUEIRA, C. G. Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de concreto armado. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.
- NOGUEIRA, C. G.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. Shear strength mechanisms in reinforced concrete structures: a one-dimensional finite element approach. IBRACON Structures and Materials Journal, Vol. 4, nº. 1, p. 100-122, 2011.
- NOGUEIRA, C. G.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures considering the influence of shear strength complementary mechanisms. Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 10, p. 953-980, 2013.
- POPOVICS, S. A numerical approach to the concrete stress-strain curve of concrete. Cement and Concrete Research, Vol. 3, p. 583-599, 1973.
- SANCHES JR, F.; VENTURINI, W. S. Damage modelling of reinforced concrete beams. Advances in Engineering Software, Vol. 38, p. 538-546, 2007.
- SOUZA, J. L. A. O. A Levenberg-Marquardt algorithm for fitting σ -w curves from three-point bend tests for plain and fiber reinforced concretes. IBRACON Structures and Materials Journal, Vol. 4, nº. 4, p. 691-694, 2011.
- STRAMANDINOLI, R. S. B.; LA ROVERE, H. L. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. Engineering Structures, Vol. 30, p. 2069-2080, 2008.
- VECCHIO, F. J.; EMARA, M. B. Shear deformations in reinforced concrete frames. ACI Structural Journal, Vol. 89, nº. 1, p. 46-56, 1992.
- WALRAVEN, J. C. Fundamental analysis of aggregate interlock. Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 107, nº. 11, p. 2245-2270, 1981.
- ZARARIS, P. D. Aggregate interlock and steel shear forces in the analysis of RC membrane elements. ACI Structural Journal, Vol. 94, nº. 2, March-April, p. 159-170, 1997.

Obs: em Referências, o nome do livro ou estudo, é escrito em negrito. Favor indicar o que deve ser negrito.