

Análise de Modelos de Cálculo para Flecha em Lajes de Concreto Armado

Hedelvan Emerson Fardin¹
Christian Donin²

Resumo

A necessidade de descrever um modelo de cálculo simplificado para verificação da flecha em lajes de concreto armado advém do corriqueiro impasse de não se utilizar métodos numéricos para tal fim. Devido a isso, esta pesquisa busca analisar modelos simplificados de cálculo de flecha em lajes de concreto armado com intuito de especificar qual melhor atende às necessidades de projetos, em relação à similaridade com o real comportamento das estruturas. De modo mais específico, são identificados modelos de cálculo simplificados para verificação da flecha em lajes de concreto armado; comparados os modelos a partir dos resultados de flechas obtidos para três casos experimentais; e elencar o modelo simplificado que mais se aproximasse do comportamento real dessas estruturas. Metodologicamente, são definidos os modelos simplificados a serem comparados: fórmula de Branson, segundo a NBR 6118:2014; o método Bilinear do CEB; a fórmula prática do CEB-FIP 90. Em seguida, são escolhidos três experimentos com lajes para se comparar os resultados das flechas experimentais teóricas. Posteriormente, define-se de que modo seria realizada a comparação, considerando-se o momento para os estados limites últimos ou estados limites de serviço e por fim, definido qual dos métodos simplificados melhor se assemelhava aos resultados experimentais.

Palavras-chave: Métodos simplificados; Flecha; Laje; Concreto armado.

1 Introdução

A análise de modelos de cálculo de flecha em lajes de concreto armado justifica-se pela necessidade de compreensão e desenvolvimento do tema no âmbito de estudo de estruturas da Engenharia Civil. Tendo em vista que definir modelos que melhor se adaptem às necessidades dos projetistas é de notória importância porque nem sempre se lança mão de um modelo numérico e, portanto, torna-se necessário o emprego de um modelo simplificado que possa suprir as necessidades do projeto sem que o mesmo seja subestimado ou superestimado.

Todavia ainda há de se pesquisar qual modelo simplificado de cálculo para flecha em lajes de concreto armado melhor corresponde aos resultados reais de deformação, afinal, o método proposto pela NBR 6118:2014 que considera a rigidez equivalente da seção, também adotado pelo *American Concrete Institute* (ACI), carece de melhoramentos, como sugeriu Araújo (2005).

Em outro viés, o modelo simplificado deve se assemelhar aos resultados experimentais, mas nem sempre o modelo proposto pela NBR 6118:2014 tem apresentado tal característica, como se evidenciou em três estudos realizados na Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC, onde Oliveira (2015), Kist (2016) e Barbieri (2016) comprovaram que os resultados do cálculo das flechas em lajes pelo modelo de Branson ficavam aquém dos experimentais.

Desse modo, o objetivo principal desta pesquisa é analisar modelos simplificados de cálculo de flecha em lajes de concreto armado com intuito de especificar qual melhor atende às necessidades de projetos, em relação à similaridade com o real comportamento das estruturas.

¹ Graduado em Engenharia Civil pela Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC, e-mail: hedelvan@gmail.com

² M.Sc., Professor da UNISC, doutorando em Engenharia Civil no PPGEC da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, e-mail: donin.eng@gmail.com

2 Os Nodelos Simplificados para Verificar a Flecha

Há vários modelos de cálculo para se verificar a flecha de determinada peça ou elemento estrutural, mas muitos desses modelos estão relacionados à verificação da flecha imediata da estrutura, o que não é de tão difícil determinação. Portanto, modelos de cálculos que prevejam de forma simplificada o comportamento de um elemento em relação à flecha diferida são escassos ou de difícil aplicação.

Araújo (2014) definiu que para se efetuar um cálculo rigoroso das deformações em peças de concreto armado, deve-se considerar a não-linearidade física do material. Para isso é necessária a adoção de diagramas de tensão-deformação específica compatíveis com os resultados experimentais. Ademais não se pode excluir os efeitos de fluência e retração do concreto, desse modo, verifica-se a necessidade do emprego de modelos reológicos com diferentes níveis de sofisticação. Mas o que contrapõe essa colocação do autor é que modelos lineares são costumeiramente empregados para estimativa do cálculo das flechas em projetos de concreto armado, e nem sempre se dispõe de uma análise numérica para realizar tal aferição.

Buscando-se estabelecer uma comparação entre métodos simplificados para cálculo de flechas em lajes de concreto armado, excluiu-se dela, métodos como: Método do Elementos Finitos e método dos Elementos de Contorno, que têm em suas metodologias análises computacionais. Ademais, cabe por ora, descrever e diferenciar a fórmula de Branson e o método Bilinear, os quais apresentam uma metodologia de cálculo simplificada para previsão do comportamento das flechas considerando outras parcelas além da flecha imediata, em elementos estruturais.

Junges (2011) descreveu a fórmula de Branson e o método bilinear como principais métodos para verificação simplificada da flecha. A partir dessas metodologias essa autora fez diferenciações entre a fórmula de Branson de acordo com a NBR 6118:2007, conforme comentários da NB-1 e conforme a ACI. Quanto ao método bilinear a diferenciação foi realizada de acordo com o *Comité Européen du Béton* (CEB) em “*Design Manual on Cracking and Deformations*” e o CEB-FIP³ *Model Code* 1990. Entretanto, dos métodos selecionados ela optou em trabalhar com a fórmula de Branson segundo a norma vigente da época (NBR 6118:2007), a fórmula de Branson de acordo com a NB-1 do Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON) e o método bilinear, sem considerar a incorporação do efeito de fluência do concreto no cálculo como recomenda o CEB-FIP 1990.

2.1 A fórmula de Branson

O método simplificado de Branson, de acordo com Junges (2011), foi proposto em 1963, e adota uma fórmula de inércia equivalente ponderada entre os estádios I e II do concreto. Essa metodologia foi primariamente empregada pelo ACI para cálculo da flecha imediata, e atualmente, também é adotada pela NBR 6118:2014. A fórmula Branson, de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014) é

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \cdot \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \right. \quad (1)$$

$$\left. \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} \cdot I_c$$

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct} \cdot I_c}{Y_t} \quad (2)$$

onde

- I_c – momento de inércia da seção bruta de concreto;
- I_{II} – momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;
- M_a – momento fletor na seção crítica do vão considerado, ou seja, o momento máximo;
- M_r – momento de fissuração do elemento estrutural, calculado pela Equação (2);
- E_{cs} – módulo de elasticidade secante do concreto.
- α – fator que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, podendo ser adotado 1,2 para seções T ou duplo T e 1,5 para seções retangulares;
- f_{ct} – resistência característica do concreto à tração;
- Y_t – distância entre o centro de gravidade e a fibra mais tracionada da seção.

Quanto à flecha diferida no tempo a NBR 6118 (ABNT, 2014) recomenda o emprego da Equação (3), composta pelas seguintes notações:

- α_f – efeito da flecha diferida no tempo;
- ξ – coeficiente em função do tempo que deve ser obtido de acordo com a Tabela (1) ou calculado pelas Equações (4) ou (5);

- ρ' – taxa geométrica da armadura longitudinal de compressão, calculada através da Equação (6);
 A_s' – área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão;
 b – largura da seção;
 d – altura útil.

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} \quad (3)$$

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (4)$$

$$\xi(t) = 0,68(0,996^t) \cdot t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (5)$$

$$\rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d} \quad (6)$$

de aço, calculado pela Equação (10), na qual deve-se adotar k_1 igual a 0,4 para barras de alta aderência ou 0,8 para barras lisas; β_2 é o coeficiente que representa a influência da aplicação ou da repetição de carregamento, podendo ser igual a 1 para o primeiro carregamento, ou igual a 0,5 para cargas de longa duração ou de elevados ciclos de carregamento. Junges (2011) relata que para a maioria das aplicações práticas, adota-se $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = 0,5$.

$$M_r = \frac{f_{ct} \cdot I_1}{y_t} \quad (8)$$

$$\zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \frac{M_r}{M_a} \quad (9)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2,5 \cdot k_1} \quad (10)$$

2.2 Método Bilinear do CEB

Araújo (2006) afirmou que o Método Bilinear do CEB permite analisar o comportamento de lajes de concreto armado até que ocorra o escoamento da armadura, no ponto onde a laje é mais solicitada. Junges (2011) sustentou que nesse método a flecha é estimada por um valor intermediário entre o valor da flecha no estágio I (W_1) e a flecha no estágio II (W_2), empregando um coeficiente de distribuição (ζ), responsável por fazer a interpolação e assim, considerar a colaboração do concreto entre as fissuras. A Equação (7) também pode ser utilizada para a obtenção de uma curvatura média e sua posterior deformação.

$$W = (1 - \zeta) \cdot W_1 + \zeta \cdot W_2 \quad (7)$$

O coeficiente de distribuição ζ deve ser considerado igual a 0 quando o momento atuante M_a é menor que o momento de fissuração M_r na seção crítica, considerando a armadura de cálculo na inércia do estágio I, calculado pela Equação (8). Porém, quando o M_a for maior que M_r , o coeficiente de distribuição deve ser calculado por meio da Equação (9), onde β_1 refere-se à característica da qualidade de aderência das barras

2.3 Fórmula prática do CEB-FIP 90

Nota-se, todavia, que esse modelo bilinear não incorpora no cálculo os efeitos de fluência e retração, por esse motivo é interessante à pesquisa que seja seguido o método bilinear do CEB-FIP 90, o qual considera o cálculo da flecha pela Equação (11), quando o M_a é menor que o M_r ou se emprega a Equação (12), quando M_a é maior que M_r (ARAÚJO, 2004):

$$W = (1 + \varphi) \cdot W_0 \quad (11)$$

$$W = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \cdot \eta \cdot (1 - 20 \cdot \rho_{cm}) \cdot W_0 \quad (12)$$

onde

- W_0 – flecha elástica calculada com o módulo de deformação secante do concreto (E_{cs}) multiplicado pelo Momento de Inércia da seção bruta de concreto (I_c);
 h – altura da seção transversal da peça;
 d – altura útil da seção;
 ρ_{cm} – taxa média de armadura comprimida, calculada pela Equação (6);
 φ – coeficiente de fluência;

Tabela 1 – Valores de coeficiente ξ em função do tempo – ABNT (2014)

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	≥ 70
Coefficiente $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

η – fator de correção, o qual adiciona ao cálculo os efeitos de fluência e retração do concreto com a armadura tracionada ρ_{tm} , em consonância à Tabela 2, a qual requer o valor da taxa média de armadura, calculada pela Equação (13), de acordo com o diagrama de momentos fletores para vigas contínuas, Figura 1.

Tabela 2 – Fator de correção do modelo CEB-FIP 90 – Junges (2011)

ρ_m (%)	0,15	0,2	0,3	0,5	0,75	1,0	1,5
η	10	8	6	4	3	2,5	2

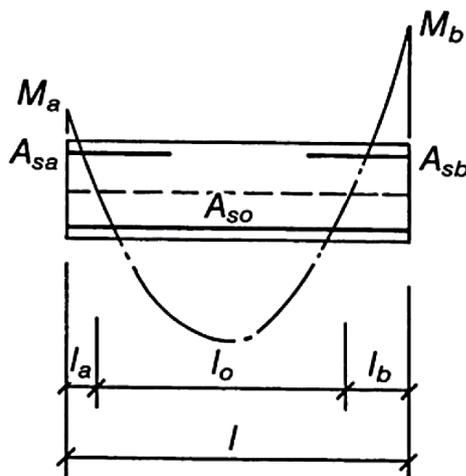


Figura 1 – Diagrama de momento fletor para vigas contínuas – CEB-FIP (1990) apud Junges (2011).

$$\rho_m = \rho_a \frac{l_a}{l} + \rho \frac{l_0}{l} + \rho_b \frac{l_b}{l} \quad (13)$$

onde

ρ_a, ρ_b – correspondem às taxas de armadura tracionada/comprimida nos apoios direito e esquerdo da viga;

l_a, l_b – correspondem aos comprimentos estimados.

3 Metodologia

3.1 Definição dos casos experimentais

Para aplicação dos modelos de cálculo simplificado de flecha em lajes de concreto armado optou-se em analisar o comportamento dos protótipos ensaiados por Oliveira (2015), Kist (2016) e Barbieri (2016) devido à disponibilidade de acesso às leituras de deslocamentos experimentais dos mesmos, pois os três estudos experimentais foram realizados na UNISC

e facilmente se teria acesso aos dados. Desse modo o Caso 01 corresponde aos resultados experimentais dos protótipos de Oliveira (2015), o Caso 02 aos resultados do protótipo de Kist (2016) e o Caso 03, aos resultados dos protótipos de Barbieri (2016).

3.1.1 Caso 01

Oliveira (2015) produziu quatro nervuras com vigotas pré-moldadas de concreto armado, provenientes da indústria e fabricadas com traço de 1,00:3,3450:3,600:0,581, respectivamente com Cimento Portland de Alta Resistência Inicial (CP V-ARI), areia natural, brita 0 e água. As capas das nervuras foram moldadas *in loco*, com traço de 1,00:2,649:2,677:0,569, correspondendo a cimento CP V-ARI, areia natural, brita 1 e água, com teste de *slump* igual a $120 \text{ mm} \pm 20 \text{ mm}$, resultando em uma constante de capa de 5,0 cm. O aço utilizado na produção das vigotas foi CA-60. Cada nervura apresentava mesma seção: 2,60 m de comprimento, 39 cm de largura, 12 cm de altura e 11 cm de altura útil, com tabelas de Poliestireno Expandido (EPS).

Após a cura do concreto das nervuras os protótipos de Oliveira (2015) foram submetidos a ensaio de flexão em um equipamento EMIC® GR048. Contudo, foram instalados deflectômetros somente nas nervuras 01 e 02 e em dado momento, para não comprometer a integridade desses equipamentos os ensaios de ambas nervuras tiveram de ser interrompidos para a devida remoção, fazendo com que as leituras de flechas também fossem interrompidas e não apresentassem mesma precisão. Já, as leituras de flechas nas nervuras 03 e 04 foram realizadas sem o auxílio de deflectômetros, o que fez com que se obtivesse mais leituras de flechas para as composições dos diagramas dessas nervuras.

A Tabela (3) mostra as cargas de ruínas e os momentos de ruptura alcançados por cada nervura. Segundo Oliveira (2015). A média das cargas de ruína experimental dos ensaios foi de 5,829 kN e o desvio padrão foi de 0,055, sendo o desvio padrão dos momentos de ruptura foi de 0,025 kN.m e a média foi de 2,623 kN.m.

Tabela 3 – Carregamentos e momentos de ruína do Caso 01 – Oliveira (2015)

Nervura	Carga de ruína (kN)	Momento de ruptura (kN.m)
Nervura 01	5,769	2,596
Nervura 02	5,873	2,643
Nervura 03	5,780	2,601
Nervura 04	5,893	2,652

3.1.2 Caso 02

Kist (2016) construiu uma laje em escala real, utilizando vigotas pré-moldadas de concreto armado, com intuito de determinar a resistência do elemento estrutural e seus respectivos deslocamentos para comparar o método de cálculo proposto pela NBR 6118: 2014 com o método experimental.

As vigotas foram produzidas por uma empresa do ramo e, para tanto, o traço empregado foi 1,00:3,45:3,60:0,581, sendo respectivamente cimento CP V-ARI, areia média natural, brita 0 e água. O aço empregado foi CA-60. Para a execução da laje, justapôs-se quatro vigotas intercaladas com tabelas de EPS. Logo, realizou-se a concretagem da capa com concreto de traço 1,00:2,50:3,33:0,517, respectivamente cimento CP V-ARI, areia média natural, brita 1 e água, com teste de *slump* igual a 140 mm \pm 20 mm que resultasse em uma constante de 4 cm. A laje moldada por Kist (2016) tinha um vão teórico $l = 3,50$ m e uma largura de atuação de cada nervura igual a 0,39 cm.

Tendo em vista que a laje não poderia ser ensaiada na prensa do laboratório de estruturas da UNISC. Fez-se uma contenção no entorno da laje com chapas de compensado e colocou-se uma lona de boa qualidade, que não permitisse o vazamento de água, pois o carregamento do elemento estrutural foi realizado com coluna de água. Anterior ao carregamento foram instalados sete deflectômetros para leituras mais precisas de deslocamentos e ao lado deles, sete régua comuns para leituras mais grosseiras, caso houvesse inviabilidade de utilização de algum deflectômetro, ou mesmo para leituras após a remoção dos equipamentos antes do colapso da estrutura e possível perda dos equipamentos.

Kist (2016) observou as diferenças existentes entre o modelo experimental, o modelo esperado de ruptura e o cálculo de projeto, pois a carga de ruptura experimental alcançou um valor igual a 2,886 kN, enquanto que o esperado de ruptura era de 1,74 kN e o cálculo de projeto era igual a 0,99 kN. Comparando-se os momentos, o momento de ruptura experimental foi igual a 4,419 kN.m, o momento esperado de ruptura foi de 2,66 kN.m e o momento de cálculo do projeto igual a 1,52 kN.m.

3.1.3 Caso 03

Barbieri (2016) realizou uma análise similar a Oliveira (2015), entretanto a autora moldou quatro nervuras com vigotas treliçadas, fabricadas na indústria com cimento CP V-ARI, areia média, brita 1, água portátil e aço CA-60. As capas das nervuras foram concretadas *in loco*, com traço para 1 m³ de concreto composto por 290 kg de cimento CP V-ARI; 450 kg de areia grossa; 450 kg de areia média; 700 kg de brita 1;

300 kg de brita 0; 175 kg de água; e 2,5 kg de aditivo polifuncional, com teste de *slump* entre 140 mm e 180 mm. Os protótipos possuíam 2 m de comprimento, com largura de 41,5 cm, altura igual a 12 cm, altura útil igual a 11 cm e altura da capa de concreto igual a 4 cm.

As quatro nervuras foram submetidas a ensaio de flexão no equipamento EMIC® GR048 do Laboratório de Estruturas da UNISC, e os resultados referentes às cargas de ruptura e momentos de ruptura estão apresentados na Tabela (4), onde se evidencia que a média experimental das cargas de ruptura foi de 8,398 kN e o desvio-padrão das nervuras foi de 0,571. Quanto aos momentos, tem-se média igual a 3,212 kN.m e desvio-padrão igual a 0,218 (BARBIERI, 2016).

Tabela 4 – Resultados experimentais do Caso 03 – Barbieri (2016)

Nervura	Carga de ruína (kN)	Momento de ruptura (kN.m)
Nervura 01	5,768	2,895
Nervura 02	8,861	3,389
Nervura 03	8,644	3,306
Nervura 04	8,520	3,259

3.2 Traçados dos diagramas de momento x deslocamento dos casos

Como os Casos 01 e 03 apresentavam quatro curvaturas de diagrama de momento X deslocamento devido ao ensaio de quatro nervuras para cada caso, optou-se por traçar apenas um diagrama de momento X deslocamento. Isso é justificado pela ideia de que as nervuras devem trabalhar juntas para a constituição de uma laje, e não isoladamente. Ou seja, mesmo que as as nervuras tenham sido ensaiadas unitariamente, considerou-se para análise desta pesquisa que elas compunham uma única laje e que estivessem sendo solicitadas igualmente.

Assim foram considerados os resultados dos ensaios laboratoriais de cada caso e calculada uma média aritmética para os deslocamentos, bem como para os momentos desses casos. Analogamente, para o Caso 02 foi calculada a média aritmética das leituras de deslocamentos e momentos atuantes dos sete deflectômetros utilizados para a realização do ensaio de carregamento de coluna de água da laje.

3.3 Definição dos modelos simplificados

Optou-se por comparar os resultados experimentais de deslocamentos dos três casos com os resultados teóricos de flecha obtidos por meio da

fórmula de Branson, a qual é indicada pela NBR 6118 (ABNT, 2014), com os resultados teóricos obtidos pelo método Bilinear do CEB e também com a fórmula prática do CEB-FIP 90, com o intuito de evidenciar qual dos métodos simplificados mais se assemelha ao comportamento real das lajes quanto aos deslocamentos das mesmas.

Poder-se-ia ainda estabelecer uma comparação com modelos numéricos, mas isso descaracterizaria o objeto desta pesquisa, que pretende estabelecer uma analogia entre diferentes métodos teóricos simplificados.

3.4 Cálculo de momentos para análise comparativa

Depois de definidos os casos e os métodos simplificados a serem comparados, definiu-se como eles seriam melhor comparados, visando identificar a eficácia ou ineficácia dos métodos simplificados em relação aos resultados experimentais. Assim, adotou-se os momentos de cálculo para os Estados Limites Últimos (ELU) de cada caso, calculados pelos próprios autores, iguais a 1,58 kN.m (OLIVEIRA, 2015), 2,13 kN.m (KIST, 2016) e 1,519 kN.m (BARBIERI, 2016).

Entretanto, é notório que no dimensionamento de lajes em concreto armado o momento de cálculo para ELU é desconsiderado em detrimento do momento de cálculo para os Estados Limites de Serviço (ELS), ou seja, a comparação entre os valores de flechas será mais lógica ao se considerar os momentos de cálculo para os ELS de cada caso.

Sendo assim, as seguintes premissas tiveram de ser adotadas para se calcular os momentos para os ELS dos três casos: quando se faz a composição de cargas para uma laje convencional de concreto armado, estima-se que cerca de 70% da carga seja representada pelas cargas permanentes (g) e 30% compete às cargas variáveis q . Por conseguinte, para se tornar mais perceptível essa composição de cargas, adotou-se a seguinte composição hipotética de cargas, segundo a NBR 6120 (ABNT, 1980): peso próprio da laje nervurada igual a 180 kgf/m², acrescido de um contrapiso com carga igual a 105 kgf/m², mais um revestimento cerâmico de carga igual a 40 kgf/m. Ademais, foi considerada uma carga variável igual a 150 kgf/m², referente a uma laje de dormitório ou sala. Ao se somar as cargas permanentes e variável, obteve-se uma carga igual a 515 kgf/m².

Assim, para se calcular o momento de cálculo para os estados limites últimos (ELU), comumente, se tomariam os valores de cargas e se aplicaria coeficientes de ponderação, para dimensionar a laje ao pior carregamento possível, ou seja, multiplicar-se-ia tanto as cargas permanentes como as cargas variáveis por 1,4, como apresenta a Equação (14), onde se evidencia

que a carga de cálculo F_d para ELU é resultante da carga característica F_k multiplicada pelo coeficiente de ponderação.

$$F_{d(ELU)} = 1,4 \cdot F_k \quad (14)$$

Todavia, como já explicitado anteriormente, não é usual em projetos de concreto armado verificar os deslocamentos para os ELU, mas para os ELS. Portanto, ainda no seguimento do exemplo hipotético, para se calcular o carregamento da laje para os ELS, aplicou-se a Equação (15), como recomenda Araújo (2014) ao considerar que para o cálculo de flechas em lajes deve ser admitida a combinação quase permanente do carregamento. Assim, as cargas permanentes não seriam multiplicadas por nenhum coeficiente de ponderação e apenas 30% das cargas variáveis seriam consideradas para esse estado. O que em valores, seria o mesmo que considerar aproximadamente 79% de F_k para se ter o valor de F_d nos ELS. Afinal de contas, se 70% da carga total da laje é referente às cargas permanentes e 30% às cargas variáveis, para ELU pode-se empregar a Equação (16), enquanto que para ELS, aplica-se a Equação (17):

$$p_0 = g + 0,3 \cdot q \quad (15)$$

$$F_{d(ELU)} = 70\% \cdot 1,4 + 30\% \cdot 1,4 \quad (16)$$

$$F_{d(ELS)} = 70\% \cdot 1,0 + 30\% \cdot 0,3 \quad (17)$$

A diferença de resultados entre as Equações (16) e (17) é de aproximadamente 79%, ou seja, as ações de cálculo para ELS representam 79% do valor das ações de cálculo para ELU, obtendo-se a Equação (18), a qual foi utilizada nesta pesquisa para se calcular os valores de momentos para os ELS de cada um dos casos experimentais:

$$F_{d(ELS)} = 0,79 \cdot F_k \quad (18)$$

Para os cálculos dos momentos foi considerado que as lajes eram biapoiadas, permitindo que se utilizasse a Equação (19), proveniente da teoria clássica de resistência dos materiais. A exemplo, tomou-se o carregamento total ($P = 5,15$ kN/m²), vão hipotético ($l = 5$ m) e obteve-se os valores de momento $M = 22,53$ kN.m para ELU e $M = 12,81$ kN.m para ELS.

$$M = \frac{P \cdot l^2}{8} \quad (19)$$

Observou-se que a diferença da divisão do momento de cálculo para ELS pelo momento de cálculo para ELU era de aproximadamente 56%. Desse modo a viabilidade em adotar 56% do valor do momento de cálculo para ELU como momento de cálculo para ELS nos três casos. Logo, os momentos de cálculo para ELS dos Casos 01, 02 e 03 são, respectivamente, 0,885 kN.m, 1,193 kN.m e 0,851 kN.m.

3.5 Traçados dos diagramas de momento x deslocamento para cada caso

Para cada caso foi traçado um diagrama de momento x deslocamento, o qual contém a média dos resultados experimentais, as flechas teóricas de acordo com os modelos analisados e as constantes de

momentos de cálculo para os ELU e ELS. Sendo que foi com essas constantes que se pode fazer as comparações de resultados de flechas entre os modelos estudados. Assim, a Figura (2) apresenta o diagrama para o Caso 01, a Figura (3) para o Caso 02, e a Figura (4) para o Caso 03.

4 Análise dos Resultados

4.1 Quanto ao momento dos ELU

A primeira análise realizada foi em relação aos resultados de flechas obtidos pelos métodos simplificados e os resultados experimentais para a faixa de momento dos ELU. Dessa maneira, ao se observar

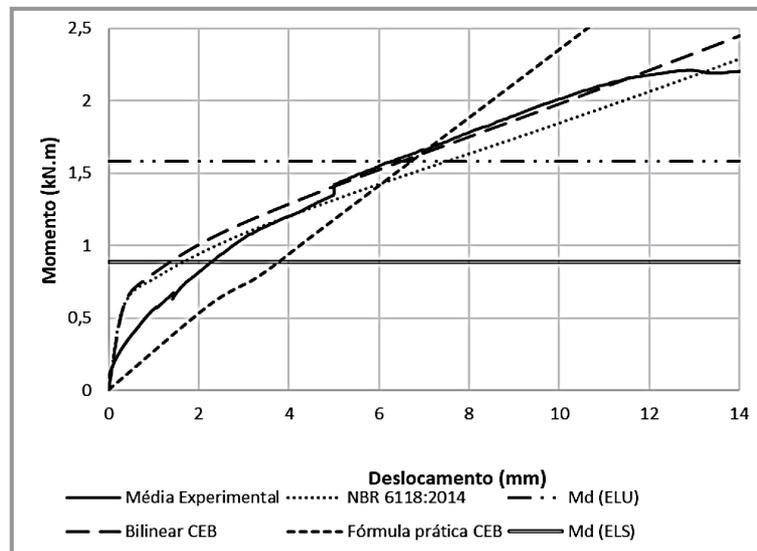


Figura 2 – Diagrama de momento x deslocamento do Caso 01.

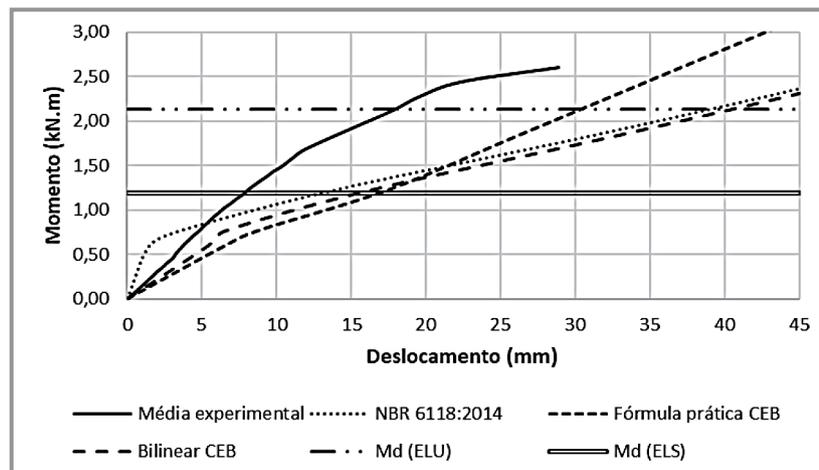


Figura 3 – Diagrama de momento x deslocamento do Caso 02.

a Figura (2), referente ao Caso 01 verifica-se que a fórmula de Branson juntamente com o método bilinear do CEB superestimam a seção da laje, principalmente na faixa de momentos entre 0,5 kN.m e 1 kN.m, e posteriormente mantém determinada coerência com os resultados experimentais. Por outro lado, a fórmula prática do CEB-FIP 90 subestima a seção desde o início do carregamento até a proximidade de 1,5 kN.m, para que, posteriormente ao momento de cálculo dos ELU esse método passe a superestimar a laje.

Em relação ao Caso 02, Figura (3), a fórmula de Branson superestima a laje, inicialmente, mas passa a subestimar a mesma em seguida, juntamente com os demais métodos simplificados. Verifica-se também que nenhum dos métodos teóricos chegou próximo à média experimental.

A partir da Figura (4), considerando-se o Caso 03, constata-se que em boa parte das leituras de deslocamentos até o momento de cálculo para os ELU a curvatura das médias experimentais tende a permanecer entre as curvaturas do método de Branson e do método bilinear do CEB, os quais estão superestimando a laje em boa parte, e a fórmula prática do CEB-FIP 90 está subestimando-a na maior parte das leituras.

Para evidenciar a divergência de resultados de flechas para o Caso 01 adotou-se como flecha unitária o valor de 6,296 mm, resultante da média experimental na ordenada de momento de cálculo para os ELU (1,58 kN.m) desse caso. Em seguida dividiu-se os outros deslocamentos teóricos para esta ordenada, a fim de gerar o gráfico de barras da Figura (5).

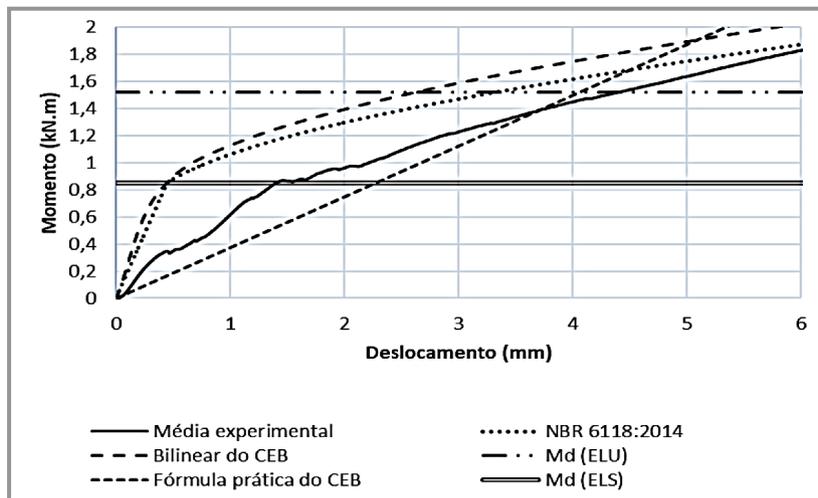


Figura 4 – Diagrama de momento x deslocamento do Caso 03.

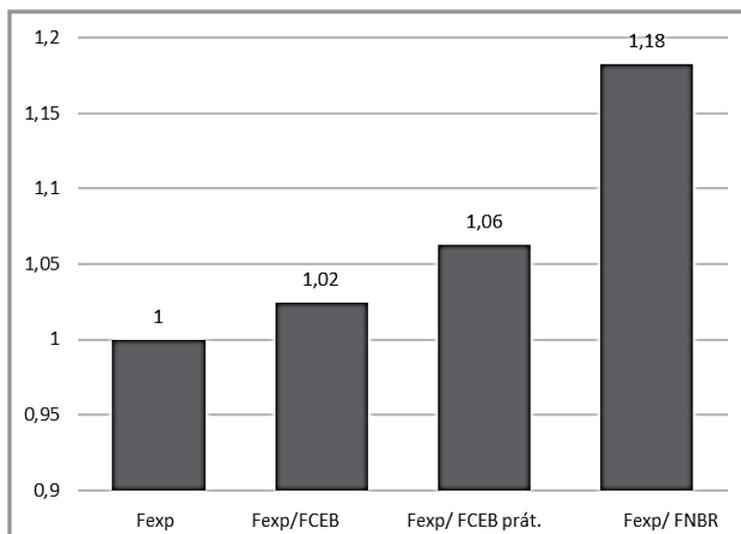


Figura 5 – Esquema comparativo de flechas do Caso 01 (ELU).

A Figura (5) apresenta os valores percentuais de flechas teóricas aferidos para o Caso 01. Nela verifica-se que o método linear do CEB foi o que mais se aproximou da flecha experimental para o valor do momento de cálculo $M_d(ELU) = 1,58 \text{ kN.m}$, apresentando um valor de flecha teórica 2% acima do experimental. Em seguida, a fórmula prática do CEB-FIP 90 apresentou um bom comportamento também, sendo que a diferença entre a flecha teórica e a flecha experimental foi de 6% acima da experimental. A flecha calculada pela fórmula de Branson, recomendada pela NBR 6118 (ABNT, 2014) foi o método simplificado que mais destoou, apresentando uma flecha teórica 18% maior que a flecha experimental para esse caso.

A Figura (6) apresenta o esquema comparativo de flechas teóricas obtidos para o Caso 02. Verifica-se inicialmente que para este caso, as metodologias sim-

plificadas apresentaram grandes discrepâncias quando comparadas com os resultados experimentais para a laje. O método bilinear do CEB que apresentou melhor comportamento no Caso 01, para o caso 02, apresentou um acréscimo da flecha teórica igual a 110% em relação à flecha aferida experimentalmente para o momento de cálculo para os ELU de $1,194 \text{ kN.m}$. A fórmula prática do CEB-FIP 90, que também apresentou empregabilidade para o cálculo de flechas no Caso 01, resultou para 6 Caso 02 em uma flecha 125% maior que a experimental para o mesmo valor de momento. A fórmula de Branson também apresentou uma flecha teórica 79% acima da experimental. Verifica-se que para o caso 02, o método simplificado que mais se aproxima dos resultados experimentais é o recomendado pela NBR 6118:2014, mas ainda assim subestima demasiadamente a estrutura.

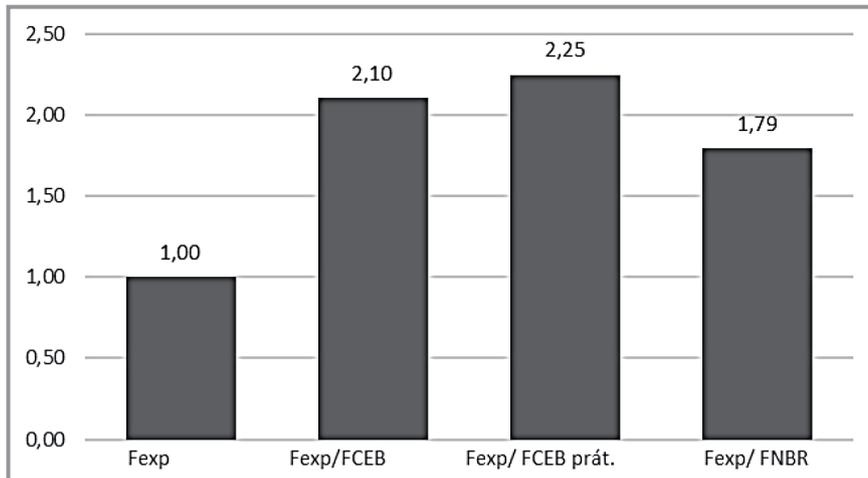


Figura 6 – Esquema comparativos de flechas do Caso 02 (ELU).

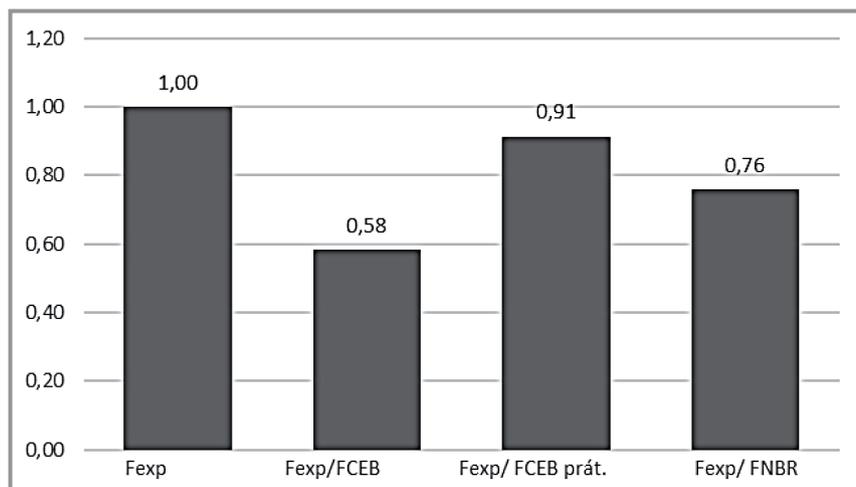


Figura 7 – Esquema comparativo de flechas do Caso 03 (ELU).

A Figura (7) apresenta o esquema comparativo para os resultados de flechas teóricas para comparação com o resultado de flecha experimental do Caso 03. Nesse caso o momento de cálculo para os ELU é igual a 1,519 kN.m.

Verifica-se que ao contrário dos outros casos as flechas teóricas não ultrapassaram os valores da experimental. Destarte, o método bilinear do CEB apresentou uma flecha muito aquém da experimental, representando apenas 58% do valor dessa. A fórmula prática do CEB-FIP 90 foi a que apresentou resultado de flecha teórica mais próxima da flecha real, atingindo um valor de 91% da experimental. Também apresentando um comportamento intermediário a fórmula de Branson resultou em uma flecha igual a 76% da obtida experimentalmente.

É notória a variação dos resultados de flechas

teóricas donde que para cada caso uma das metodologias obteve melhor desempenho em detrimento das demais. Todavia, é perceptível que para os três casos o método bilinear do CEB apresentou resultados de flecha sempre menores que a fórmula prática do CEB-FIP 90. Em contrapartida, a fórmula de Branson, segundo a NBR 6118:2014, não apresentou um comportamento similar entre os três casos, pois às vezes, alcançava resultados muito além dos outros métodos e em outras, apresentava resultados abaixo.

4.2 Quanto ao momento dos ELS

Embora a comparação dos resultados de flechas para o momento calculado referente aos ELU seja válida apenas para elucidação, a comparação dos resultados de flechas para o momento de cálculo refe-

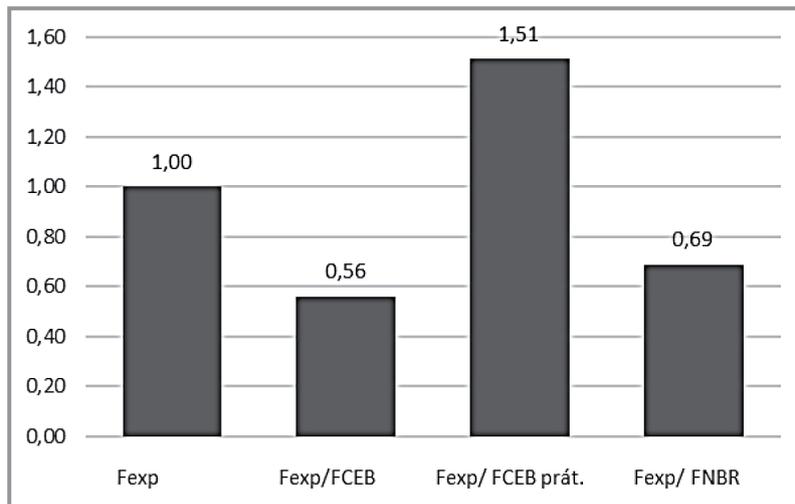


Figura 8 – Esquema comparativo de flechas do Caso 01 (ELS).

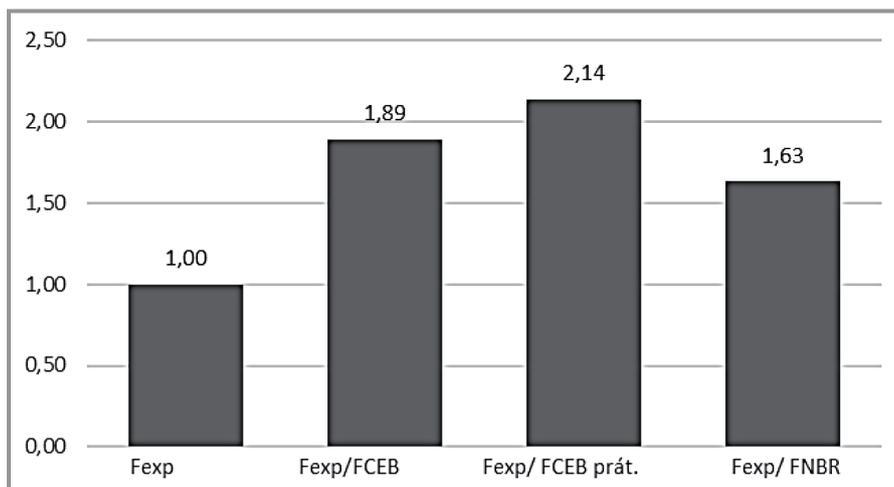


Figura 9 – Esquema comparativo de flechas do Caso 02 (ELS).

rente aos ELS é bem mais apropriada e condizente com a realidade na prática de dimensionamento de lajes de concreto armado.

A Figura (8) apresenta as divergências entre os resultados de flechas obtidas experimentalmente e obtidas teoricamente para o momento de cálculo referente aos ELS (0,885 kN.m) do Caso 01. Verifica-se, então, que a flecha calculada pelo método bilinear do CEB alcançou apenas 56% do valor da flecha experimental, bem como a flecha calculada segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014) alcançou 69% do valor da experimental, enquanto a flecha obtida com a fórmula prática do CEB-FIP 90 ultrapassou em 51% o valor experimental.

A Figura (9) mostra o esquema comparativo entre os resultados de flechas teóricas e experimental do Caso 02 em relação ao momento de cálculo referente aos ELS da laje, o qual é igual a 1,193 kN.m. Teem-se que todos os métodos simplificados ultrapassaram o valor de flecha obtido experimentalmente. Sendo que o método bilinear do CEB resultou numa flecha 89% maior que a experimental; a fórmula prática do CEB em 114% a mais que a experimental; a fórmula de Branson em uma flecha teórica 63% acima do valor da flecha aferida experimentalmente.

A Figura (10) mostra o esquema de comparação de flechas em relação ao momento de cálculo para os ELS (0,851 kN.m) do Caso 03. Os resultados alcançados pelo método bilinear do CEB e pela fórmula de Branson segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014) ficaram muito aquém do valor da flecha experimental, fato que não havia ocorrido em nenhum caso anterior. Constatou-se que o método bilinear atingiu um valor de flecha igual a 25% daquele obtido experimentalmente, enquanto que a fórmula de Branson chegou a

33% do mesmo valor. De maneira ou outra, ante ao experimento, nenhuma de ambas metodologias simplificadas teria valia. Por outro lado, a flecha calculada com a fórmula prática do CEB-FIP 90 ultrapassou em 56% o valor da flecha experimental em relação ao momento de cálculo para os ELS, seria nessas condições o único método de cálculo simplificado, empregável para verificação de flecha em laje, para esse caso.

Ao fim desses esquemas comparativos, constatou-se uma coerência conservadora dos resultados teóricos obtidos através da fórmula prática do CEB-FIP 90 em detrimento dos outros métodos simplificados, os quais resultaram em grandes divergências em relação aos resultados experimentais.

Em relação ao Caso 02 todos os métodos simplificados tendem a subestimar a laje. Isso não ocorre nos outros casos porque o protótipo de laje foi concebido em tamanho real enquanto que para os Caso 01 e 03 houve somente os rompimentos das nervuras.

5 Conclusões

Procurou-se identificar diferentes modelos de cálculo simplificados para verificação de flechas aplicáveis a lajes de concreto armado, discerni-los e estabelecer uma comparação entre seus resultados com os resultados experimentais de três casos. Foram descritos como métodos simplificados para cálculo de flecha em laje, o método bilinear do CEB, a fórmula prática do CEB-FIP 90 e a fórmula de Branson, segundo a NBR 6118:2014. Considerando-se os resultados experimentais adotados como casos analisados, concluiu-se que nenhum dos métodos simplificados é fidedigno ao com-

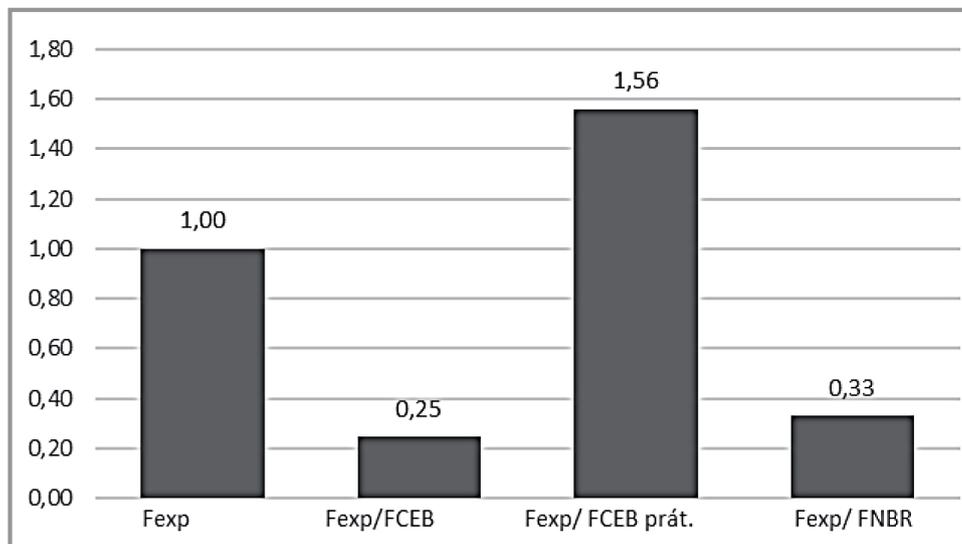


Figura 10 – Esquema comparativo de flechas do Caso 03 (ELS).

portamento real das estruturas, quanto, carecem de melhorias, especialmente a fórmula de Branson, sugerida pela NBR 6118:2014, pois foi o método que mais apresentou discrepância entre os três casos. Verifica-se que a fórmula prática do CEB-FIP 90 foi o método que menos apresentou discrepância entre os resultados obtidos teoricamente para os três casos, embora tenha, no Caso 02, apresentado divergência.

Verificou-se também que quaisquer dos métodos simplificados não foi precisamente desenvolvido para análise de flechas de lajes de concreto armado, em condições reais, pois quando se analisa o diagrama de momento X deslocamento do Caso 02, onde o protótipo foi moldado em tamanho real enquanto que nos outros casos foram ensaiadas nervuras individualmente (tamanhos possíveis para execução dos ensaios nos laboratórios), verificou-se que tanto em relação ao momento de cálculo para ELU como para ELS, todos os métodos simplificados atenderiam à necessidade de verificação da flecha, mas subestimavam muitíssimo a seção da laje em questão. Todos os casos tratavam-se de lajes nervuradas unidirecionais e, portanto, seria interessante avaliar o comportamento de lajes com diferentes seções (maciças, alveolares, cogumelo, etc.).

Nos diagramas de momento X deslocamento dos casos analisados, verifica-se que de modo geral, o método bilinear do CEB e a fórmula de Branson apresentam uma rigidez inicial acima da rigidez inicial real dos casos. Assim, seria pertinente desenvolver uma análise mais aprofundada dos modelos, com intuito de melhorá-los quanto à estimativa dessa rigidez inicial. De mesma forma ambos métodos simplificados tendem a apresentar perdas mais significativas após o início da fissuração do concreto das lajes.

Embora sendo muito consecutiva, a fórmula prática do CEB-FIP 90, dentre os métodos simplificados estudados e em relação aos resultados experimentais, é o método para cálculo de flechas em lajes de concreto armado mais seguro para os níveis usuais de cargas de serviço.

6 Referências

- ARAÚJO, José Milton de. Improvement of the ACI method for calculation of deflexions of reinforced concrete beams. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**. Rio Grande, n. 7, p. 49-60, set. 2005.
- _____. **Curso de concreto armado**. 4ª ed. Rio Grande: Dunas, 2014.
- _____. Método bilinear para análise de lajes de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**. Rio Grande, n. 8, p. 11-19, abr. 2006.
- _____. Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**. Rio Grande, n. 5, p. 1-10, ago. 2004.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- _____. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- BARBIERI, Paola. **Análise teórica e experimental de lajes treliçadas**. 2016. 73 f. Monografia (Curso de Engenharia Civil) – Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2016.
- JUNGES, Elisabeth. **Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado**. 2011. 361 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- KIST, Augusto Cristiano. **Análise teórica e experimental de lajes pré-moldadas com vigotas de concreto armado**. 2016. 67 f. Monografia (Curso de Engenharia Civil) – Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2016.
- OLIVEIRA, Maurício Alan de. **Lajes pré-moldadas nervuradas unidirecionais em concreto armado – Análise teórica e experimental de nervuras**. 2015. 78 f. Monografia (Curso de Engenharia Civil) – Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2015.